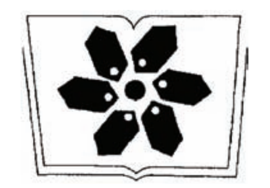
现代物理基础丛书 57

弯曲时空量子场论与量子宇宙学

刘 辽 黄超光 编著





中国科学院科学出版基金资助出版

《现代物理基础丛书》编委会

现代物理基础丛书　57

弯曲时空量子场论与量子宇宙学

刘　辽　黄超光　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书是弯曲时空量子场论和量子宇宙学的入门书籍，是在刘辽教授多年于北京师范大学讲授“弯曲时空量子场论”和“量子宇宙学”两门课程讲义的基础上整理、改编而成的。其内容叙述深入浅出，介绍了弯曲时空量子场论和量子宇宙学的基本思想、主要研究方法以及重要研究成果。内容包括时空结构与彭罗斯(Penrose)图、时空对称性与基灵(Killing)矢量场、真空和粒子、量子物质场的有效作用量、正规化与重整化、共形反常与重整化能动张量的计算、相互作用场、黑洞物理学中的若干问题以及量子宇宙学等。

本书可作为高等学校、研究院所研究生的弯曲时空量子场论和量子宇宙学课程的教学用书，也可供有关的科学研究人员、教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

弯曲时空量子场论与量子宇宙学/刘辽，黄超光编著. —北京：科学出版社，2013.10

(现代物理基础丛书；57)

ISBN 978-7-03-038801-8

Ⅰ. ①弯… Ⅱ. ①刘… ②黄… Ⅲ. ① 弯曲时空–量子场论 ② 量子宇宙学 Ⅳ. ① O413.3 ② P159

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 237456 号

责任编辑：钱 俊／责任校对：张怡君
责任印制：赵德静／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京源海印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 10 月第 一 版 开本：720×1000 16
2013 年 10 月第一次印刷 印张：15 1/4
字数：284 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

弯曲时空量子场论和量子宇宙学曾先后是引力理论研究的两大热点。它们揭示了引力场中各种物质场的量子效应以及部分引力场的量子效应，为人们提供了全新的概念 (如黑洞不是黑的，会向外发出热辐射，又如宇宙创生于无)，也为进一步深入研究引力理论提供了可资借鉴的方法 (如协变地减除物质场能动张量中的无限大从而给出重整化的能动张量，又如利用对称性将一个无限维的问题化为一个有限维的问题等)。

弯曲时空量子场论和量子宇宙学也是刘辽教授在科研中最为关注的两个领域。在这两个领域，他一面科研、一面授课，培养出一大批研究生。本书的前一部分 —— 弯曲时空量子场论，就是来源于刘辽教授于 1986 年春在日本大阪大学研究生班上课时用的英文讲稿，它主要根据 N. D. Birrel 和 P. C. W. Davies 的 *Quantum Fields in Curved Space*[1] 改编而成，且基本上保持了该书的体系，有不少段落直接摘自该书。20 世纪 80 年代后期和 90 年代，刘辽教授在北京师范大学授课过程中把讲稿扩充成讲义，增加了当时出现的一些新内容，特别是增加了以刘辽教授为代表的北京师范大学相对论研究群体的最新研究成果。《弯曲时空量子场论》讲义历经多次增删，但始终以英文版的形式出现。本书的后一部分 —— 量子宇宙学，其原形是刘辽教授为北京师范大学相对论专业研究生班讲授量子宇宙学课程而编写的中文版讲义《量子宇宙学》。

由于两本讲义形成于不同年代，并经过反复增删，所使用的符号也就前后不一，有些甚至直接将原始论文照搬放入讲义作为其中的章节。原讲义中的文献也多有残缺，有些甚至只有部分作者的名字，没有年代，没有出处；有些虽有出处，却是错的。刘辽教授非常希望将这两本讲义整理成书，但因多种原因，一拖再拖。时至今日，刘辽教授年事已高，且体弱多病，已无力将讲义整理成书。2011 年，赵峥教授把《弯曲时空量子场论》的英文讲义译成中文，并约我将刘辽教授这两本讲义合并、整理、核实、补充和修订。我原拟和赵峥教授共同承担整理的责任、共同署名，然而赵峥教授执意不肯。赵峥教授与我作出基本约定 —— 不对书中内容做大幅增删，以原书内容面世。因此，我在整理两本讲义时，遵循如下原则：一是按照我的理解，对全书的逻辑体系、符号系统、公式推导、文字叙述加以整理，在内容上尽可能忠实地反映两本讲义的原貌；二是在对参考文献的补全时，重点补全刘辽教授最初期望引用的文献，并加入少量使本书逻辑体系完备所必需的文献，而不是将整个学术界的相关文献都补充到这本书中。这一原则必然使大量相关文献 (有些

甚至是更重要的文献) 没有列到参考文献之中，对此，我只能请这些被遗漏文献的作者海涵。

原《量子宇宙学》讲义分为两大部分，一部分是量子宇宙学部分，介绍宇宙波函数的概念、计算方法与应用；另一部分是虫洞物理学。鉴于虫洞物理学作为整体已收入刘辽、赵峥、田贵花、张靖仪著的《黑洞与时间的性质》[2] 一书，本书只选择性地采用这部分内容，并将之融入“量子宇宙学”一章中。由此导致《量子宇宙学》讲义中取材于李立新的硕士论文[3] 的关于洛伦兹虫洞和时间机器一节被整体删除。在此，特向李立新教授致歉。在对两本讲义整理的过程中，为使本书能够比较自成体系，不仅对部分章节的位置做了调整，也对书中的公式做了重新推导。

经整理后，本书可以作为弯曲时空量子场论和量子宇宙学的入门书籍，其内容叙述深入浅出，包含大量详细的推导。本书可作为高等学校、研究院所研究生的弯曲时空量子场论和量子宇宙学课程的教学用书，也可供有关的科学研究人员、教师参考。然而，科学发展日新月异，这本书只是反映了一个时间段的发展，并没有包含最新的研究成果。记得温伯格在其《引力论与宇宙论》第一章开篇时写过一段话:“物理学并不是一个已经完成的逻辑体系。相反，它每时每刻都存在着一些观念上的巨大混乱，有些观念像民间史诗那样，从往昔英雄时代流传下来；而另一些则是像空想小说那样，从我们对于将来会有伟大的综合理论的向往中产生出来[4]。”读过这本书，再重温这段话，一定会有更深刻的体会与更多的感触。

在《弯曲时空量子场论》讲义当年历经的多次增删过程中，当时研究生班的朱建阳、高卓、周路群、张金珊、王波波、彭方志、李翔、贺晗、高长军等同学，参与了这本讲义的电脑编排、绘图、打印、校订等工作。特别是朱建阳博士，曾主动积极组织全部校订和编辑，付出了很多的精力。在此，我代表刘辽教授对他们的付出表示诚挚的感谢。

在将两本讲义合并整理成书的过程中，我首先要感谢赵峥教授花了大量时间将《弯曲时空量子场论》的英文讲义译成中文，在这一过程中，裴寿镛教授、刘文彪教授协助做了许多工作，翟忠旭、周史薇、刘显明、曾晓雄、丁翰、李赤喆、鹿鹏举、吕璐峰、王应林、姜馨等同学帮助录入，整理成中文讲义。作者在此对上述协助参与本书写作的同仁深表感谢。

最后，在本书的整个编写过程中，得到赵峥教授的鼎力相助。李立新教授为本书提出了宝贵意见。北京师范大学相对论组邀请我参加 2012 年底在北京师范大学召开的学术会议，并在会上对书稿的整理提出了宝贵意见。在此，我要表达我对赵峥、李立新、马永革、朱建阳、高思杰、吕宏、周彬等诸位教授以及凌意、吴小宁等研究员的衷心感谢。

本书从讲义的编写到成书的过程中，作者长期得到国家自然科学基金的资助，特别是在成书过程中得到国家自然科学基金 (10975141，11275207) 的资助，本书的

出版又得到中国科学院科学出版基金 (2012 年 009 号) 的部分资助，并得到科学出版社的大力支持，在此一并致谢。

由于我个人水平有限，加之刘辽教授已无力参与对书中内容的讨论，书中难免会有这样或那样的错误，欢迎读者批评指正。

黄超光
2012 年 12 月

符 号 约 定

书中向量场、张量场等都用黑体，而它们的分量则不用黑体。本书不采用文献 [5]、[6] 使用的抽象指标。书中的黎曼曲率张量、里奇曲率张量采用如下定义，即

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda,\sigma} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma,\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\tau\sigma}\Gamma^{\tau}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}{}_{\tau\lambda}\Gamma^{\tau}{}_{\nu\sigma}\,,$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}\text{。}$$

除“量子宇宙学”一章度规采用号差 $(-,+,+,+)$ 外，其余部分度规都采用号差 $(+,-,-,-)$。用文献 [7] 中的述语就是，在书中绝大部分采用 $(-,-,-)$，而在“量子宇宙学”一章中采用 $(+,-,-)$，其中第一个符号表示号差的符号，第二个符号表示黎曼曲率张量定义的符号，第三个符号是爱因斯坦方程中 $T_{\mu\nu}$ 前系数的符号。书中大多时候采用 $c=\hbar=G=1$ 的自然单位制，但在“量子宇宙学”一章中采用 $c=\hbar=16\pi G=1$ 的自然单位制。$t_{\rm p}$、$l_{\rm p}$、$M_{\rm p}$、$T_{\rm p}$ 等是相应自然单位中普朗克时间、普朗克长度、普朗克质量、普朗克温度等。

书中尽可能用不同的符号表示不同的物理量，但因字母有限，而物理量较多，不免有些量采用相同的符号。下面列出一些容易混淆的符号:

符号	含义
f	函数
k	① 动量的大小
	② 虫洞几率幅与 4 体积之比
$\rm k$	FRW 度规中的空间曲率
K	外曲率的迹
$k_{\rm B}$	玻尔兹曼常量
M	星体的质量
$\mathcal{M}$	流形
m	粒子的质量
$m(\tau)$	探测器在 τ 时刻的单极算子
$\rm m$	磁量子数
P^{μ}	逆变守恒流
P_0	P^{μ} 相应的守恒量
s	① 弧长
	② 粒子的旋
	③ DS 展开中的参数
T	温度
$\mathcal{T}$	克鲁斯卡时间坐标
ϕ	标量场
φ	① 方位角
	② (流形间的) 映射
	③ 重新标度后的标量场 $(\sqrt{2}\pi\sigma\phi)$
κ	① 爱因斯坦场方程中 $T_{\mu\nu}$ 前系数的大小
	② 镜子运动中的参数
$\kappa_{\rm E}$	欧化的、归一化、外曲率的迹
$\kappa_{\rm G}$	黑洞表面引力
μ	① 化学势
	② 重整化中的能量标度
ξ	标量场与引力场的耦合常数
$\boldsymbol{\xi}$	基灵矢量
ξ^{μ}	基灵矢量的分量

目　　录

第 1 章　导　　论

20 世纪 40 年代末，人们已经成功地在平直时空中把各种物质场量子化，于是，就很自然地提出如下课题：

(1) 如何在弯曲时空中把物质场量子化？

(2) 如何把引力场本身量子化？

对于问题 (2)，在许多引力或时空的量子化方案中存在一个深层次的概念性困难：我们几乎不可能对引力场 $g_{\mu\nu}(x)$ 引进量子化条件。

我们把度规张量写作

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

式中，$\eta_{\mu\nu}$ 是闵可夫斯基 (Minkowski) 度规。在弱场线性近似下，真空爱因斯坦 (Einstein) 方程可以写作

$$\Box h_{\mu\nu} = 0, \tag{1.2}$$

这是一个洛伦兹 (Lorentz) 不变的场方程。其中，二阶张量场 $h_{\mu\nu}$ 是洛伦兹群的一个表示，二次量子化后，$h_{\mu\nu}$ 场表示自旋为 2 的无质量粒子。这就是引力场的微扰量子化。但是，一般说来，如果我们想量子化 $g_{\mu\nu}(x)$，则二次量子化意味着算符 $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$ 应该在类空间隔上满足一定的对易关系。然而，在搞清楚作为 C 数的 $g_{\mu\nu}(x)$ 或度规之前，类空间隔无法定义，上述对易关系也就没有意义。但是，这个 C 数度规又要由量子化后的 $\langle g_{\mu\nu}(x)\rangle$ 来定义，上述逻辑上的困难使得我们缺乏关于 $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$ 及其量子条件的切实可行的定义。

虽然建立自洽的量子引力理论遇到巨大的困难，但是这并不妨碍人们在弯曲时空中建立量子场论。在弯曲时空量子场论中，时空背景仍是经典的。而物质场则是量子化的。经典时空与量子化的物质场由半经典的爱因斯坦方程

$$G_{\mu\nu} = -\kappa\langle T_{\mu\nu}\rangle \tag{1.3}$$

联系起来，其中 $|\ \rangle$ 表示某种量子物质的态矢量。我们首先要澄清上述方程的适用范围。从式 (1.3) 可知，物质场的量子涨落将导致引力场的量子涨落。在什么情况下可以忽略后者，保持时空的经典性质呢？如图 1.1 所示，令 B 为引力场中某点的平均黎曼曲率，$\dfrac{1}{\sqrt{B}}$ 是这点的平均曲率半径，在该点的半

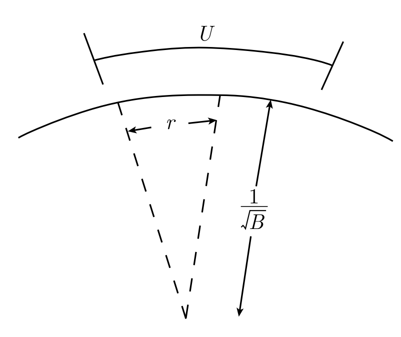


图 1.1　平均黎曼曲率

径为 r 的邻域 U 中引进一个近似的局部惯性系，可以在此近似的局部惯性系中定义物质场的正能解，即

$$f_\omega \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{1.4}$$

式中，t 是局部惯性系的时间坐标。

假定引力场足够强，或者说 B 足够大，$B^{-\frac{1}{2}}$ 足够小，则我们应该考虑不确定关系

$$\omega B^{-\frac{1}{2}} \sim 1。 \tag{1.5}$$

这里，我们已采用普朗克 (Planck) 单位制，即

$$G = \hbar = c = 1,$$

$$\begin{aligned} &\text{普朗克长度：} \quad l_\mathrm{p} = (G\hbar c^{-3})^{\frac{1}{2}} = 1(= 1.616 \times 10^{-33}\mathrm{cm}), \\ &\text{普朗克时间：} \quad t_\mathrm{p} = (G\hbar c^{-5})^{\frac{1}{2}} = 1(= 5.39 \times 10^{-44}\mathrm{s}), \\ &\text{普朗克质量：} \quad M_\mathrm{p} = (G^{-1}\hbar c)^{\frac{1}{2}} = 1(= 10^{-5}\mathrm{g}), \end{aligned} \tag{1.6}$$

并假定 ω 自身与它的不确定量 $\Delta\omega$ 同量级 (当 $B^{-\frac{1}{2}}$ 很小或者 $\Delta\omega$ 很大时，这是可能的)。式 (1.5) 相应于 $B^{-\frac{1}{2}}$ 的能量不确定值为 $\Delta\omega \sim \omega \sim B^{\frac{1}{2}}$。

在 $\omega \sim \omega + \mathrm{d}\omega$ 的间隔内，态密度 $\propto \omega^2\mathrm{d}\omega$，局部物质能量密度的不确定度为

$$\int_0^{B^{\frac{1}{2}}(\Delta\omega)} \omega \cdot \omega^2 \mathrm{d}\omega \sim B^2。 \tag{1.7}$$

从爱因斯坦方程可知，此物质能量密度的不确定度将导致时空曲率之同量级的不确定度 B^2，如果 $B < 1$，则 $B^2 \ll 1$，这时时空的量子涨落可以忽略。

条件 $B < 1$ 意味着曲率半径大于普朗克长度，即 $B^{-\frac{1}{2}} > (G\hbar c^{-3})^{\frac{1}{2}} = 1.616 \times 10^{-33}\mathrm{cm} \equiv l_\mathrm{p}$ (普朗克长度)。

总之，在条件

$$\text{曲率半径} > l_\mathrm{p} = (G\hbar c^{-3})^{\frac{1}{2}} \tag{1.8}$$

或

$$\text{曲率} < K_\mathrm{p} = G^{-1}\hbar^{-1}c^3 = 10^{66}\mathrm{cm}^{-2} \tag{1.9}$$

下，可以忽略时空的量子涨落，保持时空的经典意义，保证弯曲时空量子场论成立。

例 1　大爆炸宇宙

弯曲时空量子场论仅在普朗克时间之后才成立，或者说，我们不可能给出演化宇宙在普朗克时间之前的时空描述。

例 2　施瓦西 (Schwarzschild) 黑洞

在黑洞内部有一个半径为 l_{p} 的普朗克球，经典时空的概念只能用于此球的外部，所以位于普朗克球之内的、从经典广义相对论推演出的奇点可能没有意义。另外，考虑黑洞温度

$$T=\frac{\hbar c^3}{8\pi k_{\mathrm{B}}G}\frac{1}{M}=(G^{-1}\hbar c)^{\frac{1}{2}}(G^{-1}\hbar c^5 k_{\mathrm{B}}^{-2})^{\frac{1}{2}}\frac{1}{M}=M_{\mathrm{p}}T_{\mathrm{p}}\frac{1}{M}=\frac{M_{\mathrm{p}}}{M}T_{\mathrm{p}}, \tag{1.10}$$

假如普朗克温度是温度的上限，M_{p} 则应是黑洞质量的下限。这就是说，不可能用任何方法把一个黑洞的质量约化到普朗克质量以下。

斯莫林 (Smolin) 等在 1987 年指出[8]，蒸发的施瓦西黑洞的质量一旦趋于普朗克质量，它就会转化为超弦态。

2004 年，刘辽和裴寿镛[9] 通过量子化施瓦西黑洞也指出，蒸发的施瓦西黑洞有一个普朗克尺度的残留的基态 (见第 9.7 节)。

第 2 章　时空结构与彭罗斯图

2.1　时 空 结 构

我们感兴趣的时空结构被限制为：

(1) 它是一个 4 维、实连通的、C^∞ 的豪斯多夫 (Hausdorff) 流形，在其上可以定义一个 C^r 的、非退化的、洛伦兹型的对称度规张量 $\boldsymbol{g}$，而且时空具有足够好的因果性。

(2) 此时空应该是爱因斯坦引力场方程的解，或者说仅考虑广义相对论描述的时空。

几点注释：

(1) 4 维。经验表明，我们生活的时空是 4 维 (空间 3 维，时间 1 维) 的，否则静电学的平方反比定律 (库仑 (Coulomb) 定律) 将不成立。研究表明，对于 n 维空间中的 $(n-1)$ 维超曲面，从球对称和高斯 (Gauss) 定律可知 $E \sim q/r^{n-1}$。当然，按照超弦理论，时空是 10 维的，但是额外的 6 维应该被紧致到比普朗克尺度更小的范围，或因其他机制而不被我们所察觉。

(2) 实连通。由于我们测量的结果是实的，所以只能通过测量装置认识时空的因果连通部分。

(3) C^∞。我们假定时空流形是足够光滑的，为方便起见，假定它是 ∞ 可微的。

(4) 豪斯多夫空间。如果一个拓扑空间 $\mathcal{M}$ 中，任何两点 $p, q \in \mathcal{M}(p \neq q)$，一定存在 p、q 各自的邻域 U_p 和 U_q，有

$$U_p \cap U_q = \emptyset, \tag{2.1.1}$$

即 $\mathcal{M}$ 中任何两点都可以被区分，这样的流形称为豪斯多夫空间。图 2.1 给出一个非豪斯多夫空间的例子：两条线的 $x = y < 0$ 部分被认同，则 $a(x = 0)$ 和 $a'(y = 0)$ 两点不能被区分。

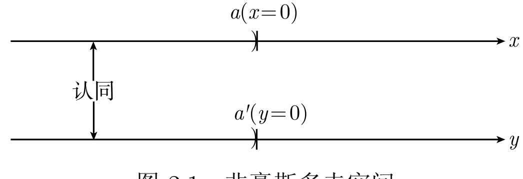


图 2.1　非豪斯多夫空间

(5) 非退化度规

$$\det g_{\mu\nu} \neq 0 \quad \text{或} \quad g^{\mu\nu} \quad \text{存在。} \tag{2.1.2}$$

(6) 洛伦兹度规。$\boldsymbol{g}$ 的特征根的号差是 ± 2，即度规对角化后，其对角元为 3 正 1 负或为 3 负 1 正。我们仅强调，通过 4 维空间的洛伦兹号差，能赋予 4 个坐标中的一个以“时间”意义，其余三个以“空间”意义。应该注意，当号差从 $+2$ 变到 -2 时，或从 -2 变到 $+2$ 时，$R^{\mu}_{\nu\lambda\rho}$ 和 $R_{\mu\nu} := R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$ 保持不变，而 $g_{\mu\nu}$，$\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu, R_{\mu\nu\lambda\rho}, R^{\nu}_{\mu}, R$ 改变正负号。在不同号差情况下，T_{00} 始终是正的。由于度规号差、黎曼 (Riemann) 曲率张量、里奇 (Ricci) 张量的定义不同，爱因斯坦方程也略有差别，即①

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}, \tag{2.1.3}$$

或

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}\text{。} \tag{2.1.4}$$

(7) 对称性

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad \Gamma^{\mu}_{\nu\tau} = \Gamma^{\mu}_{\tau\nu}, \tag{2.1.5}$$

按定义，度规张量永远是对称的；而联络系数的对称性，意味着时空只有曲率没有挠率。

(8) 有足够好的因果性。所谓时空具有足够好的因果性，首先，要求在时空中不存在裸奇异和闭合类时线；其次，为讨论方便，要求时空中存在一个整体双曲区域，在这个区域内，可由柯西面上的初值条件完全确定这一区域的全部未来和过去。

2.2 彭 罗 斯 图

在广义相对论中，引进彭罗斯 (Penrose) 图会使时空结构的研究变得比较方便。在彭罗斯图上，所有类光测地线都是 $\pm 45^\circ$ 的直线，从而使时空的因果结构变得一目了然。有了它，可以方便地研究时空的最大延伸或时空的最大解析延拓。彭罗斯图避开了坐标奇异性，只保留曲率奇点。

共形无穷远的定义 (图 2.2)：

$I^{\pm}(\mathcal{M}) \sim$ 流形 $\mathcal{M}$ 的类时未来 (过去) 无穷远，

粗略地说：$r =$ 常数，$t \to \pm\infty$；

$I^0 \sim$ 流形 $\mathcal{M}$ 的类空无穷远，

① 关于这一问题的进一步讨论可见文献 [7] 的第一页上。

粗略地说：$t=$ 常数，$r\to\infty$；

$\mathcal{J}^{\pm}(\mathcal{M})\sim$ 流形 $\mathcal{M}$ 的类光未来 (过去) 无穷远，

粗略地说：$(t\mp r)=$ 常数，$(t\pm r)\to\pm\infty$。

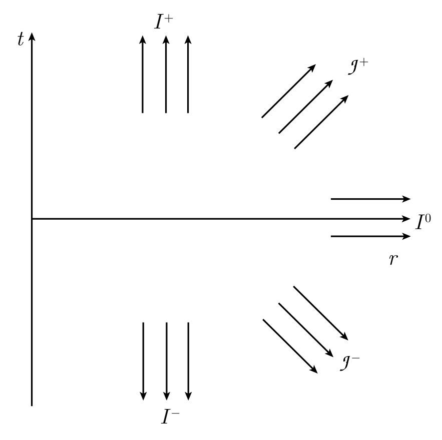


图 2.2　共形无穷远的定义

2.3　闵可夫斯基时空的彭罗斯图

球坐标下的闵可夫斯基度规为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}r^2-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2), \tag{2.3.1}$$

引进如下坐标变换 $(t,r,\theta,\varphi)\to(\psi,\xi,\theta,\varphi)$,

$$\begin{cases} t+r=\tan\dfrac{\psi+\xi}{2}, \\ t-r=\tan\dfrac{\psi-\xi}{2}, \end{cases} \tag{2.3.2}$$

或

$$\begin{cases} t=\dfrac{\sin\psi}{2\cos\dfrac{\psi+\xi}{2}\cos\dfrac{\psi-\xi}{2}}, \\ r=\dfrac{\sin\xi}{2\cos\dfrac{\psi+\xi}{2}\cos\dfrac{\psi-\xi}{2}}, \end{cases} \tag{2.3.3}$$

则线元式 (2.3.1) 变成

$$\mathrm{d}s^2=\frac{1}{4\cos^2\dfrac{\psi+\xi}{2}\cos^2\dfrac{\psi-\xi}{2}}\left[\mathrm{d}\psi^2-\mathrm{d}\xi^2-\sin^2\xi(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\right]。 \tag{2.3.4}$$

可以证明

$$
\begin{aligned}
&r=0 \leftrightarrow \xi=0,\\
&I^{+} \leftrightarrow (\psi=\pi,\xi=0),\\
&I^{-} \leftrightarrow (\psi=-\pi,\xi=0),\\
&I^{0} \leftrightarrow (\psi=0,\xi=\pi),\\
&\mathcal{J}^{+} \sim \text{连接}(\pi,0)\text{和}(0,\pi)\text{的开线段},\\
&\mathcal{J}^{-} \sim \text{连接}(-\pi,0)\text{和}(0,\pi)\text{的开线段。}
\end{aligned}
\tag{2.3.5}
$$

注意：所有的边界点都是式 (2.3.4) 的奇点 (坐标奇点)，只有开三角区域和 $r=0$ 的开线段相应于闵可夫斯基时空。现在我们作一个共形变换

$$
\mathrm{d}\bar{s}^2 = C^2\mathrm{d}s^2 \tag{2.3.6}
$$

或

$$
\bar{g}_{\mu\nu} = C^2 g_{\mu\nu}, \tag{2.3.7}
$$

其中

$$
C^2 = 4\cos^2\left(\frac{\psi+\xi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\psi-\xi}{2}\right)。 \tag{2.3.8}
$$

闭三角区称为闵可夫斯基时空的彭罗斯图，除去 $I^{\pm}$、I^0 和 $r=0$ 上的点外，图上每一个点表示一个二维球面。注意：在任何一个方向上，按仿射参量计量，测地线都能无限延伸。在这个意义上，闵可夫斯基时空是测地完备的 (g-complete)，如图 2.3 所示。

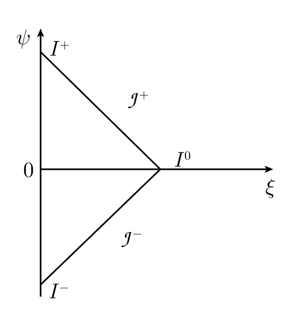


图 2.3　闵可夫斯基时空的彭罗斯图

2.4　施瓦西时空的彭罗斯图

众所周知，当使用施瓦西坐标时，施瓦西时空

$$
\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) \tag{2.4.1}
$$

有两处奇异性，即 $r=0$ 和 $r=2M$ $\left(\text{或 } r=\dfrac{2GM}{c^2}\right)$。引进如下的坐标变换

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{R}^2-\mathcal{T}^2=\left(\frac{r}{2M}-1\right)\exp\left(\frac{r}{2M}\right),\\
&\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{R}}=\tanh\left(\frac{t}{4M}\right) \qquad (r>2M),\\
&\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}}=\tanh\left(\frac{t}{4M}\right) \qquad (r<2M),
\end{aligned}
\tag{2.4.2}
$$

我们得到用克鲁斯卡尔 (Kruskal) 坐标表述的施瓦西时空 (图 2.4)，即

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{32M^3}{r}\right)\exp\left(-\frac{r}{2M}\right)(\mathrm{d}\mathcal{T}^2 - \mathrm{d}\mathcal{R}^2) - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2), \tag{2.4.3}$$

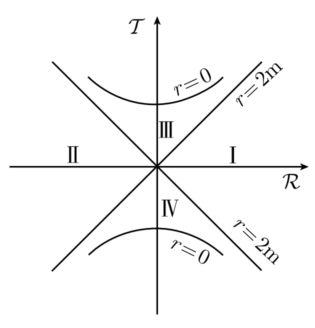


图 2.4　用克鲁斯卡尔坐标表述的施瓦西时空

它消除了施瓦西奇点 ($r = 2M$ 处的坐标奇异性)，只保留了 $r = 0$ 处的曲率奇点。克鲁斯卡尔证明，此流形是施瓦西时空的最大解析延拓[10]。现在，再引进一个坐标变换

$$(\mathcal{T}, \mathcal{R}, \theta, \varphi) \to (\psi, \xi, \theta, \varphi),$$

这里

$$\mathcal{T} + \mathcal{R} = \tan\left(\frac{\psi+\xi}{2}\right),$$
$$\mathcal{T} - \mathcal{R} = \tan\left(\frac{\psi-\xi}{2}\right), \tag{2.4.4}$$

于是有

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{32M^3}{r}\right)\frac{\exp\left(-\frac{r}{2M}\right)(\mathrm{d}\psi^2 - \mathrm{d}\xi^2)}{4\cos^2\left(\frac{\psi+\xi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\psi-\xi}{2}\right)} - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)。 \tag{2.4.5}$$

现在做共形变换

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = C^2\mathrm{d}s^2, \tag{2.4.6}$$
$$C^2 \equiv 4\cos^2\left(\frac{\psi+\xi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\psi-\xi}{2}\right),$$

这样，我们得到了施瓦西时空的最大解析延拓的彭罗斯图 (图 2.5)，它包括 Ⅰ 与 Ⅱ 两个宇宙 (相互间无因果联系)、黑洞区Ⅲ、白洞区Ⅳ。

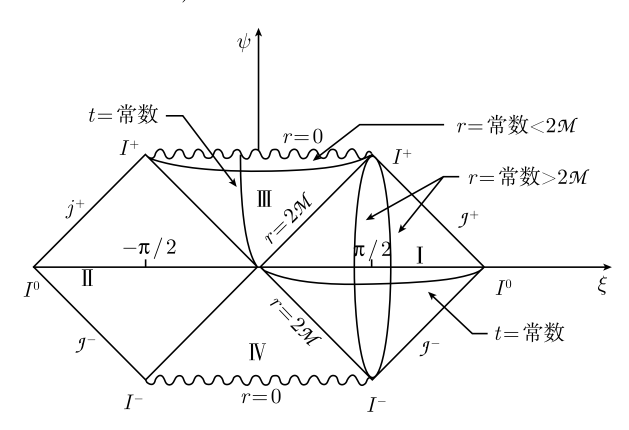


图 2.5　施瓦西时空的彭罗斯图

注意：

(1) 所有的静态球对称真空解 (包括黑洞解和白洞解) 都包含在图 2.5 中。此图对于空间反射和时间反演都是对称的。

(2) 时空有两类不同的边界，即时空奇点 $r=0$、无穷远。

任何测地线不能被延伸到上述边界之外。由于在 $r=0$ 处存在时空内禀奇点，此流形不是测地完备的。然而，此图是施瓦西时空的最大解析延拓。

2.5 弗里德曼–罗伯逊–沃克时空的彭罗斯图

弗里德曼–罗伯逊–沃克 (Friedmann-Robertson-Walker，FRW) 时空线元的标准形式是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\mathrm{k}r^2} + r^2\mathrm{d}\Omega^2\right] \\ &= \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\mathrm{d}\chi^2 + f^2(\chi)\mathrm{d}\Omega^2\right], \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

其中

$$f(\chi) = r = \begin{cases} \sin\chi & (0 \leqslant \chi \leqslant \pi, \mathrm{k}=+1) \\ \chi & (0 \leqslant \chi < \infty, \mathrm{k}=0) \\ \sinh\chi & (0 \leqslant \chi < \infty, \mathrm{k}=-1) \end{cases}, \tag{2.5.2}$$

$\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$ 是单位球面上的线元。如果引进共形时间

$$\mathrm{d}\eta = a^{-1}(t)\mathrm{d}t \tag{2.5.3}$$

或

$$\eta = \int^t a^{-1}(t')\mathrm{d}t', \tag{2.5.4}$$

弗里德曼–罗伯逊–沃克度规化成

$$\mathrm{d}s^2 = C^2(\eta)\left[\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\chi^2 - f^2(\chi)\mathrm{d}\Omega^2\right], \tag{2.5.5}$$

式中，$C^2(\eta) = a^2[t(\eta)]$。对于物质为主的零压强情况

$$\begin{aligned} &\mathrm{k}=+1 \quad C(\eta) = -\frac{E}{3}(1-\cos\eta), \quad t = -\frac{E}{3}(\eta - \sin\eta) \quad (E<0), \\ &\mathrm{k}=-1 \quad C(\eta) = -\frac{E}{3}(1-\cosh\eta), \quad t = -\frac{E}{3}(\eta - \sinh\eta) \quad (E>0), \\ &\mathrm{k}=0 \qquad C(\eta) = \eta^2, \qquad t = \frac{1}{3}\eta^3 \qquad (E=0), \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

这里，积分常数 E =(动能)+(势能)。

说明：

(1) k = +1 的彭罗斯图。从式 (2.5.5) 与式 (2.5.6) 容易得到如图 2.6 所示的彭罗斯图。但需注意，只有对于物质为主 ($p=0$) 的宇宙，$\eta \in (0, 2\pi)$[7]；对于 $p>0$ 的宇宙，η 的取值上限会减小[11]；对于辐射为主 ($p=\frac{1}{3}\rho$) 的宇宙，$\eta \in (0, \pi)$[7]。

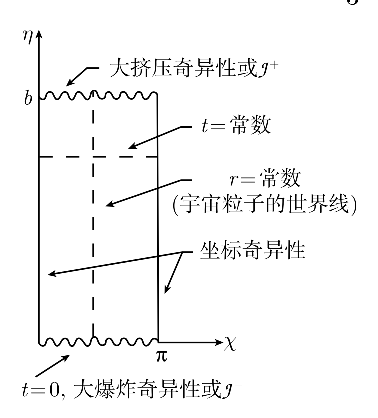


图 2.6　k = +1 的弗里德曼–罗伯逊–沃克时空的彭罗斯图

对于物质为主的宇宙，$b=2\pi$; 对于辐射为主的宇宙，$b=\pi$

(2) k = 0 的彭罗斯图。引入

$$\eta \pm \chi = \tan\left(\frac{\psi \pm \xi}{2}\right), \tag{2.5.7}$$

则有

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{C^2(\eta)}{4\cos^2\left(\frac{\psi+\xi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\psi-\xi}{2}\right)}\left(\mathrm{d}\psi^2 - \mathrm{d}\xi^2 - \sin^2\xi \mathrm{d}\Omega^2\right)。 \tag{2.5.8}$$

它共形于

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \frac{C^2(\eta)}{4}\left(\mathrm{d}\psi^2 - \mathrm{d}\xi^2 - \sin^2\xi \mathrm{d}\Omega^2\right), \tag{2.5.9}$$

相应的彭罗斯图如图 2.7 所示。

(3) k = −1 的彭罗斯图

引进

$$\tan\left(\frac{\psi \pm \xi}{2}\right) = \tanh\left(\frac{\eta \pm \chi}{2}\right), \tag{2.5.10}$$

则有

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{C^2(\eta)}{\cos^2(\psi+\xi)\cos^2(\psi-\xi)}(\mathrm{d}\psi^2 - \mathrm{d}\xi^2 - \sin^2\xi \mathrm{d}\Omega^2)。 \tag{2.5.11}$$

共形变换后，得

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = C^2(\eta)(\mathrm{d}\psi^2 - \mathrm{d}\xi^2 - \sin^2\xi \mathrm{d}\Omega^2), \tag{2.5.12}$$

相应的彭罗斯图如图 2.8 所示。

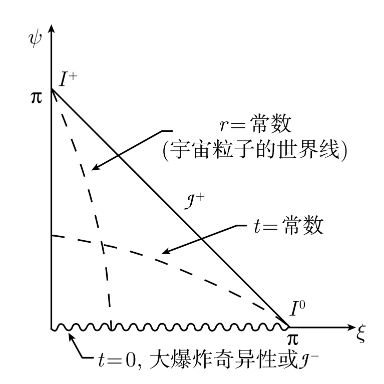


图 2.7 k = 0 的弗里德曼–罗伯逊–沃克时空的彭罗斯图

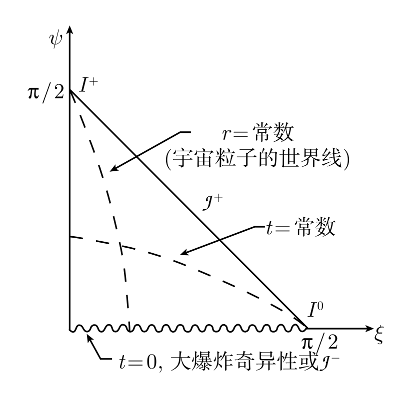


图 2.8 k = −1 的弗里德曼–罗伯逊–沃克时空的彭罗斯图

2.6 德西特时空的彭罗斯图

德西特 (de Sitter) 时空可以被视为镶嵌在 5 维闵可夫斯基度量空间中的 4 维超双曲面 (H^4)，则有

$$\eta_{AB}Z^AZ^B = -\alpha^2, \qquad \alpha = \left(\frac{3}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.6.1}$$

即

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{AB}\mathrm{d}Z^A\mathrm{d}Z^B, \tag{2.6.2}$$

其中，$\eta_{AB} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1,-1)$ 是 5 维闵可夫斯基度量。

k = 0 的情况如图 2.9 所示。

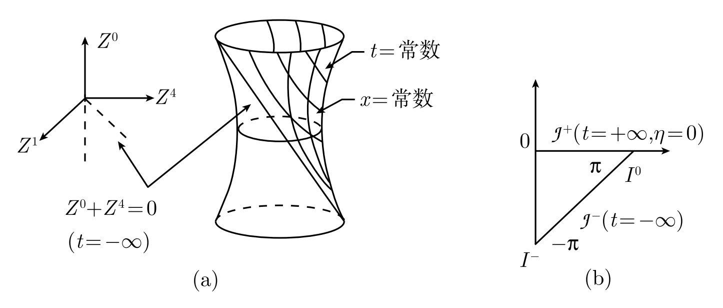


图 2.9　k = 0 的德西特时空的彭罗斯图

考虑下面定义的坐标 (t，x^i，$(i=1,2,3)$)，即

$$Z^0=\alpha\sinh\left(\frac{t}{a}\right)+\frac{1}{2}\alpha^{-1}\exp\left(\frac{t}{\alpha}\right)|x|^2, \tag{2.6.3}$$

$$Z^4=\alpha\cosh\left(\frac{t}{a}\right)-\frac{1}{2}\alpha^{-1}\exp\left(\frac{t}{\alpha}\right)|x|^2, \tag{2.6.4}$$

$$Z^i=x^i\exp\left(\frac{t}{\alpha}\right), \tag{2.6.5}$$

其中

$$\delta_{ij}x^ix^j=|x|^2,\quad -\infty<t,\ x^i<+\infty。$$

从式 (2.6.3) 与式 (2.6.4) 可得

$$Z^0+Z^4>0, \tag{2.6.6}$$

即新坐标域仅覆盖 $Z^0+Z^4>0$ 的空间区域，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=\mathrm{d}t^2-\exp\left(\frac{2t}{\alpha}\right)\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\\&=\left(\frac{\alpha}{\eta}\right)^2(\mathrm{d}\eta^2-\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j),\end{aligned} \tag{2.6.7}$$

$$\eta=-\alpha\exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right)\quad(-\infty<\eta<0)。 \tag{2.6.8}$$

显然，它共形于闵可夫斯基时空，所以它的彭罗斯图与闵可夫斯基时空的彭罗斯图相同，但是只有闵可夫斯基图的下一半。这一时空常被称为稳恒态时空，度规 (2.6.7) 常被称为稳恒态宇宙度规。稳恒态宇宙模型可由完满宇宙学原理[12] 得到，也可在爱因斯坦方程中变更能量动量张量的结构[13, 14] 得到。

k = 1 的情况。


令

$$\begin{aligned}
Z^0 &= \alpha\sinh(t/\alpha),\\
Z^1 &= \alpha\cosh(t/\alpha)\cos\chi,\\
Z^2 &= \alpha\cosh(t/\alpha)\sin\chi\cos\theta,\\
Z^3 &= \alpha\cosh(t/\alpha)\sin\chi\sin\theta\cos\varphi,\\
Z^4 &= \alpha\cosh(t/\alpha)\sin\chi\sin\theta\sin\varphi,
\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

得

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \alpha^2\cosh^2\left(\frac{t}{a}\right)(\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\mathrm{d}\Omega^2)。 \tag{2.6.10}$$

如图 2.10 所示，它覆盖了整个流形 ($\chi = 0, \pi$ 与 $\theta = 0, \pi$ 是其极坐标型奇点)。

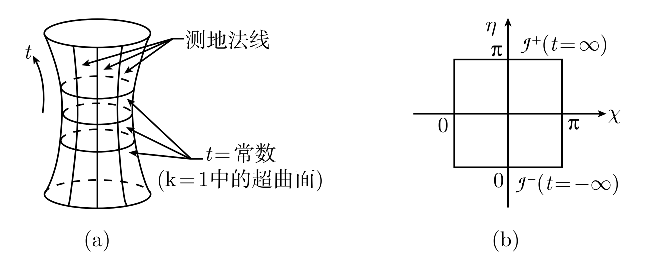


图 2.10 k = 1 的德西特时空的彭罗斯图

1928 年，罗伯逊[15] 证明了静态德西特度规可以通过如下的坐标变换从 k = 0 的德西特度规得到，即

$$\begin{aligned}
t' &= t + \frac{\alpha}{2}\ln|1 - r^2/\alpha^2|,\\
r' &= \exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right)\frac{r}{|1 - r^2/\alpha^2|^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned} \tag{2.6.11}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2, \tag{2.6.12}$$

其中，t' 和 r' 是 k = 0 的德西特球坐标。当 $0 \leqslant r < \alpha$ 时，度规是静态的，静态区域对应于彭罗斯图 (图 2.11) 的左右两个部分；$r = 0, \alpha$ 是坐标奇点；当 $r > \alpha$ 时，度规不再是静态的，它对应于彭罗斯图 (图 2.11) 的上下两个区域。

k = −1 情况[16]。

时空线元可写成

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\alpha^2}{\sinh^2\eta}(\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\chi^2 - \sin^2\chi\mathrm{d}\Omega^2), \tag{2.6.13}$$

彭罗斯图如图 2.12 所示。

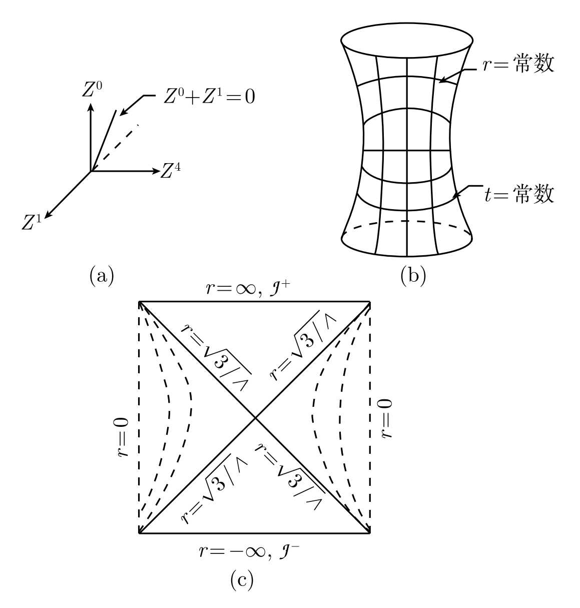


图 2.11　静态德西特时空的彭罗斯图

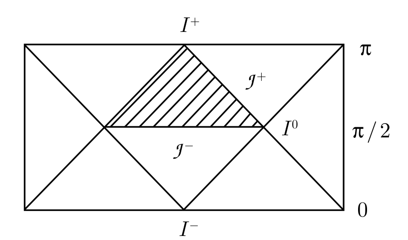


图 2.12　$k=-1$ 的德西特时空的彭罗斯图

第 3 章　时空对称性与基灵矢量场

时空对称性由度规空间的基灵 (Killing) 矢量场决定。

3.1　李　导　数

设映射

$$\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N} \tag{3.1.1}$$

诱导出映射

$$\varphi^* : V_p \to U_{\varphi(p)}, \tag{3.1.2}$$

其中，$\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是流形，$p \in \mathcal{M}, \varphi(p) \in \mathcal{N}$，$V_p$ 和 $U_{\varphi(p)}$ 分别是 p 点和 $\varphi(p)$ 点的切空间。现在假定 φ 是一个从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{M}$ 自身的映射，$\varphi_t : p \mapsto q$ 是矢量场 $\boldsymbol{\xi}$ 所诱导的单参微分同胚群，t 是群参量，那么可用 φ_t^* 在流形 $\mathcal{M}$ 中移动张量场 $T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}$。定义 $T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}$ 沿矢量场 $\boldsymbol{\xi}$ 的李 (Lie) 导数为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}} T_p^{\mu_1\cdots}{}_{\nu_1\cdots} &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_{-t}^* T_q^{\mu_1\cdots}{}_{\nu_1\cdots} - T_p^{\mu_1\cdots}{}_{\nu_1\cdots}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\delta T_p^{\mu_1\cdots}{}_{\nu_1\cdots}}{t},\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

式中，$\boldsymbol{\xi}$ 是积分曲线 φ_t 的切矢，$\delta T_p^{\mu_1\cdots}{}_{\nu_1\cdots}$ 是 $T^{\mu_1\cdots}{}_{\nu_1\cdots}$ 在 p 点的形式变分 (图 3.1)。

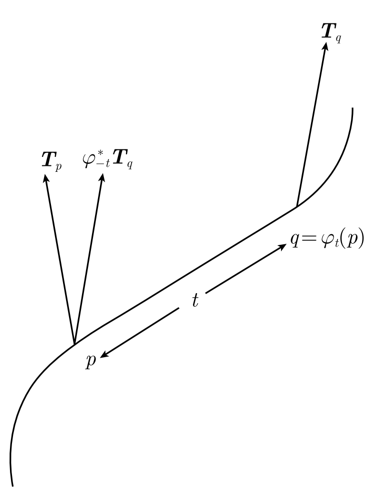


图 3.1　李导数定义的示意图

评注：比较微分几何中的三种微分。

(1) 偏微分：$T^{\mu}{}_{,\nu}$ 不保持张量性质;

(2) 协变微分：$T^{\mu}{}_{;\nu}$ 保持张量性质，但改变张量的阶数;

(3) 李导数：既保持张量性质，又保持张量阶数。

可以证明：

(1) $\forall f$，$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}} f = f_{,\mu}\xi^{\mu}$;

(2) $\forall \eta^{\mu}$，$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}} \eta^{\mu} = \eta^{\mu}{}_{;\nu}\xi^{\nu} - \xi^{\mu}{}_{;\nu}\eta^{\nu}$;

(3) $\forall \omega_{\mu}$，$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}} \omega_{\mu} = \omega_{\mu;\nu}\xi^{\nu} + \xi^{\nu}{}_{;\mu}\omega_{\nu}$;

(4) $\forall T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}$，

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}} T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}\\ =&T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_n;\lambda}\xi^{\lambda} - \xi^{\mu_1}{}_{;\lambda}T^{\lambda\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} - \cdots - \xi^{\mu_k}{}_{;\lambda}T^{\mu_1\cdots\lambda}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}\\ &+\xi^{\lambda}{}_{;\nu_1}T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\lambda\cdots\nu_n} + \cdots + \xi^{\lambda}{}_{;\nu_n}T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\mu_1\cdots\lambda}。\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

3.2 基灵矢量场

定义 如果

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}} T_p^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_n} = 0, \tag{3.2.1}$$

并且 φ_t 是矢量场 $\boldsymbol{\xi}$ 决定的积分曲线，则称 φ_t 是张量场 $\boldsymbol{T}$ 的单参运动群。

如果把 $\boldsymbol{T}$ 选作度规张量场 $\boldsymbol{g}$，则有

$$\begin{aligned}0=&\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}} g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} + g_{\mu\nu;\lambda}\xi^{\lambda}\\ =&\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}。\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

这时，称 $\boldsymbol{\xi}$ 为度规的一个基灵矢量场。式 (3.2.2) 称为基灵方程。所以，每一个基灵矢量场 $\boldsymbol{\xi}$ 确定度规的一个对称变换，或者说确定度规场的一个单参运动群 φ_t

$$\bar{x}^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}\mathrm{d}t, \tag{3.2.3}$$

也可以说 φ_t 是等度规映射。

如果 ξ^{λ} 是基灵矢量场，在黎曼法坐标下有

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\xi^{\lambda} = 0。 \tag{3.2.4}$$

令 $\xi^{\lambda}_{(\alpha)} = \delta^{\lambda}_{\alpha}$，则

$$0 = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\xi^{\lambda}_{(\alpha)} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\delta^{\lambda}_{\alpha} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}。 \tag{3.2.5}$$

这意味着，如果 $g_{\mu\nu}$ 不依赖于 x^{α}，则

$$\{\delta^{\lambda}_{\alpha}\} = \xi^{\lambda}_{(\alpha)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3) \tag{3.2.6}$$

是一个基灵矢量场。

用能动张量 $T^\mu_{\ \nu}$ 和基灵矢量 ξ^ν 构建一个矢量

$$P^\mu \equiv T^\mu_{\ \nu}\xi^\nu, \tag{3.2.7}$$

容易证明

$$P^\mu_{\ ;\mu} = 0。 \tag{3.2.8}$$

对于一个紧致可定向域，高斯定理指出

$$\int_D P^\mu_{\ ;\mu}\mathrm{d}V_4 = \int_{\partial D} \boldsymbol{P}^\mu \mathrm{d}\sigma_\mu = 0, \tag{3.2.9}$$

其中，$\mathrm{d}V_4$ 是与度规相配的体积元，$\mathrm{d}\sigma_\mu$ 是边界 ∂D 上的体积元。对于一个孤立物帚煽煞蛩够统，或者一个渐进平直时空，可以得到一个守恒的积分量，即

$$P_0 = \int_\sigma P^0 \mathrm{d}V_3, \tag{3.2.10}$$

其中，$\mathrm{d}V_3$ 是以基灵矢量场 $\boldsymbol{\xi}$ 为法线的超曲面 σ 上的体积元。如果 $\xi^\mu = \delta^\mu_0$ 是一个类时基灵矢量场，那么 $P^0 = T^0_{\ \nu}\xi^\nu = T^0_{\ \nu}\delta^\nu_0 = T^0_{\ 0}$ 恰是物帚煽煞蛩够统的能量密度。如果存在类时基灵矢量，P_0 恰是给定的孤立物帚煽煞蛩够统的总能量。上面的讨论表明，一般来说，对于一个任意的物帚煽煞蛩够统，总能量没有意义，除非此系统既是孤立系统，又存在类时基灵矢量场。

3.3 一些重要时空的基灵矢量场

3.3.1 闵可夫斯基时空

采用笛卡儿坐标系，基灵方程化为

$$\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} = 0。 \tag{3.3.1}$$

由

$$\begin{aligned} \xi_{\mu,\nu\rho} + \xi_{\nu,\mu\rho} &= 0, \\ \xi_{\nu,\rho\mu} + \xi_{\rho,\nu\mu} &= 0, \\ \xi_{\rho,\mu\nu} + \xi_{\mu,\rho\nu} &= 0, \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

可得

$$\xi_{\mu,\nu\rho} = 0。 \tag{3.3.3}$$

式 (3.3.3) 的通解为

$$\xi_\mu = C_\mu + \varepsilon_{\mu\nu}x^\nu, \tag{3.3.4}$$

其中，$\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$，所以共有 10 个线性独立的基灵矢量场 (10 个独立参数)，包括 3 个空间转动，3 个特殊洛伦兹变换，4 个平移 (3 个空间平移，1 个时间平移)。这是 4 维流形 ($\mathbb{R}^4$) 所具有的最高对称性。

3.3.2 2 维球面

2 维球面的线元是

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin\theta^2 \mathrm{d}\varphi^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + \sin^2 x^1 (\mathrm{d}x^2)^2。 \tag{3.3.5}$$

基灵方程

$$\xi_{1;1} = 0, \qquad \xi_{1;2} + \xi_{2;1} = 0, \qquad \xi_{2;2} = 0,$$

可分别化为

$$\xi^1{}_{,1} = 0, \quad \xi^1{}_{,2} + \sin^2\theta \xi^2{}_{,1} = 0, \quad \xi^1 \cos\theta + \sin\theta \xi^2{}_{,2} = 0。 \tag{3.3.6}$$

方程 (3.3.6) 的通解是

$$\xi^1 = A\sin(\varphi + \alpha), \quad \xi^2 = A\cos(\varphi + \alpha)\cot\theta + b, \tag{3.3.7}$$

或

$$\begin{aligned} \xi^1 &= A\cos\alpha\sin\varphi + A\sin\alpha\cos\varphi, \\ \xi^2 &= A\cos\alpha\cos\varphi\cot\theta + A\sin\alpha\sin\varphi\cot\theta + b, \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

所以，共有 3 个线性独立的基灵矢量场，即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{(1)} &= (\sin\varphi, \cos\varphi\cot\theta), \\ \boldsymbol{\xi}_{(2)} &= (\cos\varphi, \sin\varphi\cot\theta), \\ \boldsymbol{\xi}_{(3)} &= (0, 1) \qquad \left(\text{即} \quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

它们又可写为

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = A\cos\alpha \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi\cot\theta \end{pmatrix} + A\sin\alpha \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi\cot\theta \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.10}$$

或

$$\boldsymbol{\xi} = A\cos\alpha\boldsymbol{\xi}_{(1)} + A\sin\alpha\boldsymbol{\xi}_{(2)} + b\boldsymbol{\xi}_{(3)}。 \tag{3.3.11}$$

2 维球面 ($\mathbb{S}^2$) 具有 2 维流形的最高对称性。

3.3.3 施瓦西时空

可以证明施瓦西时空有 4 个基灵矢量场，即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{(1)} &= (0, 0, \sin\varphi, \cos\varphi\cot\theta), \\ \boldsymbol{\xi}_{(2)} &= (0, 0, \cos\varphi, \sin\varphi\cot\theta), \\ \boldsymbol{\xi}_{(3)} &= (0, 0, 0, 1) \quad \left(\text{即} \frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\ \boldsymbol{\xi}_{(4)} &= (1, 0, 0, 0) \quad \left(\text{即} \frac{\partial}{\partial t}\right), \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

其中，$\boldsymbol{\xi}_{(1)}$、$\boldsymbol{\xi}_{(2)}$、$\boldsymbol{\xi}_{(3)}$ 是类空的，$\boldsymbol{\xi}_{(4)}$ 是类时的。容易看出，施瓦西时空的拓扑是 $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^2$。

3.3.4 稳态轴对称时空

稳态轴对称时空的基灵矢量场是

$$\boldsymbol{\xi}_{(\varphi)} = (0,0,0,1) \quad \left(\text{即}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

和

$$\boldsymbol{\xi}_{(t)} = (1,0,0,0) \quad \left(\text{即}\frac{\partial}{\partial t}\right), \tag{3.3.13}$$

其中，$\boldsymbol{\xi}_{(\varphi)}$ 类空，$\boldsymbol{\xi}_{(t)}$ 类时。

3.3.5 k = 0 的弗里德曼–罗伯逊–沃克时空

k = 0 的弗里德曼–罗伯逊–沃克时空共有 6 个类空基灵矢量场，它们是

$$\boldsymbol{\xi}_{(k)} = c_k + \varepsilon_{kl}x^l \qquad (k,l=1,2,3), \tag{3.3.14}$$

其中

$$\varepsilon_{kl} = -\varepsilon_{lk}\text{。} \tag{3.3.15}$$

其拓扑为 $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3$。

3.3.6 k = ±1 的弗里德曼–罗伯逊–沃克时空

k = ±1 的弗里德曼–罗伯逊–沃克时空也分别有 6 个类空基灵矢量场。拓扑分别为 $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^3$ 和 $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3$。

3.4 共形基灵矢量场

3.4.1 共形基灵矢量场

定义 如果

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}} g_{\mu\nu} = \lambda(x) g_{\mu\nu}, \tag{3.4.1}$$

其中，$\lambda(x)$ 是标量函数，则称 $\boldsymbol{\xi}$ 是共形基灵矢量场，或者称由 $\boldsymbol{\xi}$ 生成的积分曲线 φ_t 是度规的共形群，即 φ_t 是共形等度规映射。通常写

$$\varphi_t^* g_{\mu\nu} = C^2(t) g_{\mu\nu}, \qquad (\text{共形变换}), \tag{3.4.2}$$

从李导数的定义

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}} g_{\mu\nu} &= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{C^2 g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}}{t}\right\} \\ &= g_{\mu\nu}\lim_{t\to 0}\left\{\frac{C^2-1}{t}\right\}\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

和式 (3.4.1) 知

$$C^2(t) = 1 + \lambda t + \cdots。\tag{3.4.4}$$

3.4.2　几种常用时空

爱因斯坦宇宙，或称为静态爱因斯坦宇宙，其度规为[17]

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{1}{\varLambda}\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-r^2} + r^2\mathrm{d}\varOmega^2\right),\tag{3.4.5}$$

其中，$\varLambda > 0$ 是宇宙常数，对于松散介质来说，物质密度只能是 $\rho = \dfrac{\varLambda}{4\pi G}$。

米尔恩 (Milne) 时空，又称为米尔恩宇宙，其度规为[18]

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2t^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2),\tag{3.4.6}$$

其中，a 为常数。

伦德勒 (Rindler) 时空的度规为[19]

$$\mathrm{d}s^2 = a^2x^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2,\tag{3.4.7}$$

其中，a 也是常数。伦德勒时空是一族在闵可夫斯基时空中沿 x 方向做匀加速运动的粒子看到的时空。

开爱因斯坦宇宙的度规是

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1+r^2} + r^2\mathrm{d}\varOmega^2\right),\tag{3.4.8}$$

其中，a 还是一个常数。这是一个静态的宇宙，空间曲率是负的，空间是 3 维超曲面。

3.4.3　常用时空之间的共形关系

我们不加证明地给出各种时空之间的共形关系[1]：

(1) 稳恒态时空 $\leftrightarrow$ $\mathrm{k}=1,0$ 的 FRW 时空 $\leftrightarrow$ 爱因斯坦宇宙 $\leftrightarrow$ 德西特时空 $\leftrightarrow$ 闵可夫斯基空间

(2) 米尔恩时空 $\leftrightarrow$ $\mathrm{k}=-1$ 的 FRW 时空 $\leftrightarrow$ 开爱因斯坦宇宙 $\leftrightarrow$ 静态德西特时空 $\leftrightarrow$ 伦德勒时空

3.4.4　有关流形拓扑的一个注

对于 4 维流形 $\mathcal{M}$ 来说，欧拉 (Euler)–庞加莱 (Poincaré) 示性数 (或欧拉示性数) $\chi(\mathcal{M})$ 由下式给出，即

$$\chi(\mathcal{M}) = \sum_p(-1)^p b_\mathrm{p} = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4。\tag{3.4.9}$$

其中，b_0 是连通区域的个数，对于一个连通流形来说，$b_0=1$；b_p 称为贝蒂 (Betti) 数，是流形 $\mathcal{M}$ 中 $p+1(p\neq 0)$ 维洞的数目。以 2 维环面 (图 3.2) 为例，它只有一个连通区域，故 $b_0=1$；有两个 2 维洞 (分别在环面的中心和环形管的中间)，故 $b_1=2$；环面还围出一个 3 维的空间 (3 维洞)，故 $b_2=1$。对于 2 维流形

$$\chi(\mathcal{M})=b_0-b_1+b_2=1-2+1=0。\tag{3.4.10}$$



图 3.2　环面

对于紧致、定向的无边界流形

$$\chi(\mathcal{M}\times\mathcal{N})=\chi(\mathcal{M})\cdot\chi(\mathcal{N})。\tag{3.4.11}$$

可以证明，$\chi(\mathbb{R}^4)=b_0=1$，$\chi(\mathbb{S}^{2n})=2$，$\chi(\mathbb{S}^{2n+1})=0$，伦德勒空间 $\chi(\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^1)=b_0-b_1=1-1=0$。

第 4 章　真空和粒子

正如平直时空中的量子场论一样，弯曲时空中的量子场论应该有希尔伯特 (Hilbert) 空间的福克 (Fock) 表象。也就是说，应该建立物质场的真空和粒子态。

4.1　博戈留波夫变换

首先回顾一下平直时空中的量子场论。以实标量场 (实克莱因–戈登 (Klein-Gordon) 场) 为例，由于正频模函数

$$\{u_{\boldsymbol{k}}(x)\} = \left\{(4\pi\omega)^{-1/2}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)]\right\} \tag{4.1.1}$$

和它们的复共轭一起组成完备集，因此波函数算符可以用它们展开

$$\phi(x) = \sum_{\boldsymbol{k}}\left[a_{\boldsymbol{k}}u_{\boldsymbol{k}}(x) + a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}u_{\boldsymbol{k}}^{*}(x)\right] \equiv (a, a^{\dagger})\begin{pmatrix} u \\ u^{*} \end{pmatrix}。 \tag{4.1.2}$$

展开系数量子化后就是湮灭、产生算符，真空态 $|0\rangle$ 定义为

$$a_{\boldsymbol{k}}|0\rangle = 0, \quad \forall\boldsymbol{k}。 \tag{4.1.3}$$

但是应该记得，只有当我们选择了时间坐标之后，才能定义正、负频模函数。如果选择另一个坐标系或者另一组模函数的完备集，会得到

$$\phi(x) = \sum_{\boldsymbol{k}}\left[\bar{a}_{\boldsymbol{k}}\bar{u}_{\boldsymbol{k}}(x) + \bar{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}\bar{u}_{\boldsymbol{k}}^{*}(x)\right] \equiv (\bar{a}, \bar{a}^{\dagger})\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{u}^{*} \end{pmatrix}。 \tag{4.1.4}$$

这样得到的 $\bar{a}_{\boldsymbol{k}}$ 定义一种新的真空态 $|\bar{0}\rangle$

$$\bar{a}_{\boldsymbol{k}}|\bar{0}\rangle = 0, \qquad \forall\boldsymbol{k}, \tag{4.1.5}$$

从式 (4.1.2) 和式 (4.1.4) 可得

$$(a, a^{\dagger})\begin{pmatrix} u \\ u^{*} \end{pmatrix} = (\bar{a}, \bar{a}^{\dagger})\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{u}^{*} \end{pmatrix}。 \tag{4.1.6}$$

为简洁起见，下面改用角标 i 标记不同的模函数，即 $u_i(x) = N\exp\left[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{x}-\omega_i t)\right]$，其中 N 是归一化常数。因 u_i 和 $\bar{u}_i$ 二者都构成完备集，所以有

$$\bar{u}_j = \sum_i\left(\alpha_{ji}u_i + \beta_{ji}u_i^{*}\right), \tag{4.1.7}$$

或者

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{u}\ =\alpha u+\beta u^{*},\\ \bar{u}^{*}=\alpha^{*}u^{*}+\beta^{*}u,\end{array}\right.\tag{4.1.8}$$

上面两个等式可写成矩阵形式，即

$$\begin{pmatrix}\bar{u}\\ \bar{u}^{*}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta^{*} & \alpha^{*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ u^{*}\end{pmatrix}。\tag{4.1.9}$$

展开系数 α_{ij}、β_{ij} 称为博戈留波夫 (Bogolyubov) 系数。

把式 (4.1.9) 代入式 (4.1.6) 的右边，并考虑模式分解的唯一性，最后得到著名的博戈留波夫变换，即

$$(a,a^{\dagger})=(\bar{a},\bar{a}^{\dagger})\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta^{*} & \alpha^{*}\end{pmatrix}\tag{4.1.10}$$

或者

$$\begin{pmatrix}a\\ a^{\dagger}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^{\mathrm{T}} & \beta^{*\mathrm{T}}\\ \beta^{\mathrm{T}} & \alpha^{*\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{a}\\ \bar{a}^{\dagger}\end{pmatrix},\tag{4.1.11}$$

其中，角标 T 表示矩阵转置，此即

$$\begin{aligned}a_i&=\sum_j(\alpha_{ji}\bar{a}_j+\beta_{ji}^{*}\bar{a}_j^{\dagger}),\\ a_i^{\dagger}&=\sum_j(\beta_{ji}\bar{a}_j+\alpha_{ji}^{*}\bar{a}_j^{\dagger})。\end{aligned}\tag{4.1.12}$$

两个函数的内积定义为

$$\begin{aligned}(\phi_1,\phi_2)&\equiv-i\int_{t=常数}\phi_1\overleftrightarrow{\partial_t}\phi_2^{*}\sqrt{h}\mathrm{d}^3x\\ &\equiv-i\int_{t=常数}\left[\phi_1(\partial_t\phi_2^{*})-(\partial_t\phi_1)\phi_2^{*}\right]\sqrt{h}\mathrm{d}^3x\\ &=-(\phi_2,\phi_1)^{*},\end{aligned}\tag{4.1.13}$$

其中，h 是 t 为常数的类空超曲面上的度规张量的行列式。不难证明模函数 $\{u_i\}$ 满足下面的正交归一关系

$$\begin{aligned}(u_i,u_j)&=\delta_{ij},\\ (u_i^{*},u_j^{*})&=-\delta_{ij},\\ (u_i,u_j^{*})&=0。\end{aligned}\tag{4.1.14}$$

类似地，$\{\bar{u}_i\}$ 也满足这样的关系。由式 (4.1.7) 和式 (4.1.14) 可得

$$\alpha_{ij}=(\bar{u}_i,u_j),\quad \beta_{ij}=-(\bar{u}_i,u_j^{*})。\tag{4.1.15}$$

博戈留波夫系数具有如下关系

$$\begin{aligned}\sum_k(\alpha_{ik}\alpha^*_{jk}-\beta_{ik}\beta^*_{jk})&=\delta_{ij},\\ \sum_k(\alpha_{ik}\beta_{jk}-\beta_{ik}\alpha_{jk})&=0。\end{aligned}\tag{4.1.16}$$

从式 (4.1.12) 可知，当且仅当 $\beta_{ji}\neq 0$，或者说正负频相混时，这两个福克空间不同。因此，博戈留波夫系数 β_{ji} 称为混频系数。不难证明

$$a_i|\bar{0}\rangle=\sum_j\beta^*_{ji}|\bar{1}_j\rangle,\tag{4.1.17}$$

或

$$\langle\bar{0}|N_i|\bar{0}\rangle=\sum_j|\beta_{ji}|^2。\tag{4.1.18}$$

式 (4.1.18) 解释为由模式 $\bar{u}_j$ 或 $\bar{a}_j$ 定义的真空 $|\bar{0}\rangle$ 中包含有用 u_j 或 a_j 定义的粒子。这说明，真空和粒子的概念依赖于所用的坐标或模函数 (观测者，探测装置)，真空和粒子都不是广义不变的东西。

4.2 闵可夫斯基背景流形上的福克表象

4.2.1 惯性系中的量子场论

洛伦兹协变的量子场论保证在任何惯性系中：① 4 动量 p_μ 是类时或类光的; ② p_μ 在时间轴上的投影的符号 (正负号) 绝不可能改变。因此，洛伦兹变换绝不可能使正负频模函数混合，也即 $\beta_{ji}=0$，或者说福克表象是唯一的。

4.2.2 伦德勒坐标下的量子场论

坐标变换

$$\begin{cases}t=a^{-1}\mathrm{e}^{a\xi}\sinh a\eta\\ x=a^{-1}\mathrm{e}^{a\xi}\cosh a\eta\end{cases}\qquad(a>0)\tag{4.2.1}$$

把闵可夫斯基坐标 (t,x) 与伦德勒坐标 (η,ξ) 联系起来。对于 2 维时空，线元为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2=\mathrm{e}^{2a\xi}(\mathrm{d}\eta^2-\mathrm{d}\xi^2)。\tag{4.2.2}$$

容易看出

$$\begin{cases}\bar{u}=t-x=-a^{-1}\mathrm{e}^{a(\xi-\eta)}=-a^{-1}\mathrm{e}^{-au}\\ \bar{v}=t+x=a^{-1}\mathrm{e}^{a(\xi+\eta)}=a^{-1}\mathrm{e}^{av}\end{cases},\tag{4.2.3}$$

所以，伦德勒坐标域仅覆盖闵可夫斯基流形的四分之一开域 R。令 $t \to -t$, $x \to -x$，可得伦德勒坐标域 L。对于 L 和 R，光锥恰是事件视界。闵可夫斯基流形上的伦德勒坐标域及其彭罗斯图分别由图 4.1 和图 4.2 给出。

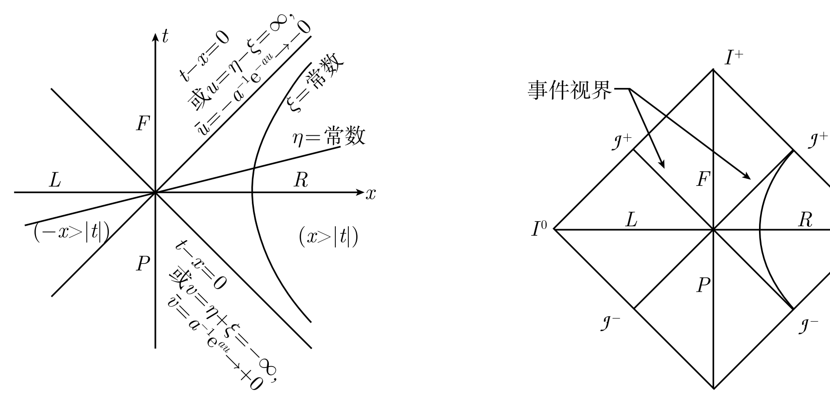


图 4.1　2 维闵可夫斯基流形上的伦德勒坐标域
L 和 R 是两个互不联通的伦德勒坐标域

图 4.2　2 维闵可夫斯基流形上的彭罗斯图
L 和 R 是两个互不联通的伦德勒坐标域的彭罗斯图

注意：η = 常数是柯西面，遍及 $R \cup L$，所以 F 区和 P 区分别是 $R \cup L$ 的因果未来和因果过去。伦德勒观测者 ($\xi=$ 常数) 在 (t, x) 平面上描出一条双曲线 ($x^2 - t^2 = a^{-2}\mathrm{e}^{2a\xi} =$ 常数 > 0)，因此伦德勒观测者保持恒定的固有加速度 $a\mathrm{e}^{-a\xi} = \alpha^{-1}$，此加速度即观测者在相对于他瞬间静止的参考系中感受到的加速度。

在惯性系中，

$$\phi = \sum_k \left(a_k \bar{u}_k + a_k^\dagger \bar{u}_k^* \right), \tag{4.2.4}$$

其中，$\bar{u}_k$ 是无质量粒子的克莱因–戈登方程

$$\Box\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)\phi = \frac{\partial^2}{\partial \bar{u}\partial \bar{v}}\phi = 0 \tag{4.2.5}$$

的解，即

$$\bar{u}_k = (4\pi\omega)^{-1/2} \exp(\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega t)。 \tag{4.2.6}$$

在伦德勒坐标系中，应该组合

$$u_k^{(R)} \begin{cases} = 0 & (\text{在 } L \text{ 区中}) \\ \neq 0 & (\text{在 } R \text{ 区中}) \end{cases} \tag{4.2.7}$$

$$u_k^{(L)} \begin{cases} \neq 0 & (\text{在 } L \text{ 区中}) \\ = 0 & (\text{在 } R \text{ 区中}) \end{cases} \tag{4.2.8}$$

以得到完备集，因此同一个波函数 ϕ 也可以用它们来展开

$$\phi = \sum_k \left[b_k^{(1)} u_k^{(L)} + b_k^{(1)\dagger} u_k^{(L)*} + b_k^{(2)} u_k^{(R)} + b_k^{(2)\dagger} u_k^{(R)*} \right], \tag{4.2.9}$$

其中

$$\begin{aligned} u_k^{(R)} &= (4\pi\omega)^{-1/2} \exp(\mathrm{i}k\xi - \mathrm{i}\omega\eta), \\ u_k^{(L)} &= (4\pi\omega)^{-1/2} \exp(\mathrm{i}k\xi + \mathrm{i}\omega\eta) \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

是无质量克莱因–戈登方程

$$e^{2a\xi} \Box\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \right) \phi = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \phi = 0 \tag{4.2.11}$$

的解。

注意：虽然克莱因–戈登方程的形式在惯性系中和在伦德勒系中相同，但它们的定义域不同。显然，可以用如下方式定义两种不同的真空态 $|0\rangle_M$ 和 $|0\rangle_R$，即

$$a_k |0\rangle_M = 0, \qquad \forall k, \tag{4.2.12}$$

$$b_k^{(1)} |0\rangle_R = b_k^{(2)} |0\rangle_R = 0, \qquad \forall k。 \tag{4.2.13}$$

虽然 $u_k^{(L)}$ 和 $u_k^{(R)}$ 在 $\bar{u} = \bar{v} = 0$ 处，或说在 $u = \infty, v = -\infty$ 处 (注意，当 $\xi \to -\infty$ 时，η 不确定) 都是不解析的，但它们的组合

$$u_k^{(R)} + \mathrm{e}^{-\pi\omega/a} u_{-k}^{(L)*} \quad 与 \quad u_{-k}^{(R)*} + \mathrm{e}^{\pi\omega/a} u_k^{(L)} \tag{4.2.14}$$

在 $\bar{u} = \bar{v} = 0$ 处都是解析且有界的。这是因为式 (4.2.14) 的第一个组合可改写为

$$u_k^{(R)} + \mathrm{e}^{-\pi\omega/a} u_{-k}^{(L)*} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\xi-\eta)} \left[(4\pi\omega)^{-1/2} (1 + \mathrm{e}^{-\pi\omega/a}) \right], \tag{4.2.15}$$

从

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\xi-\eta)} = [a(x-t)]^{\mathrm{i}\omega/a} \quad 和 \quad \bar{u}^{\mathrm{i}\omega/a} = (t-x)^{\mathrm{i}\omega/a} \tag{4.2.16}$$

可得

$$u_k^{(R)} + \mathrm{e}^{-\pi\omega/a} u_{-k}^{(L)*} \sim \bar{u}^{\mathrm{i}\omega/a}, \tag{4.2.17}$$

所以式 (4.2.14) 在闵可夫斯基坐标下分别正比于

$$\begin{cases} \bar{u}^{\mathrm{i}\omega/a} & (k > 0) \\ \bar{v}^{-\mathrm{i}\omega/a} & (k < 0) \end{cases} (\omega = |k|) \tag{4.2.18}$$

和

$$\begin{cases} \bar{v}^{\mathrm{i}\omega/a} & (k > 0) \\ \bar{u}^{-\mathrm{i}\omega/a} & (k < 0) \end{cases}, \tag{4.2.19}$$

注意，在 $u_k^{(R)}$ 和 $u_k^{(L)}$ 中k总是正的。从式 (4.2.18) 和式 (4.2.19) 容易看出，式 (4.2.14) 所示的组合在 $\bar{u} = \bar{v} = 0$ 处是解析的。所以，式 (4.2.14) 所示的模式将分享闵可夫

斯基模式 $\bar{u}_k$ 的正频解析性质，它们将定义相同的真空态 $|0\rangle_M$。于是，我们可以借助式 (4.2.14) 把 ϕ 展开为

$$\phi = \sum_{-\infty}^{+\infty} [2\sinh(\pi\omega/a)]^{-1/2} \left\{ d_k^{(1)} \left[\mathrm{e}^{\pi\omega/2a} u_k^{(R)} + \mathrm{e}^{-\pi\omega/2a} u_{-k}^{(L)*} \right] + d_k^{(2)} \left[\mathrm{e}^{-\pi\omega/2a} u_{-k}^{(R)*} + \mathrm{e}^{\pi\omega/2a} u_k^{(L)} \right] + \text{厄米共轭项} \right\}, \tag{4.2.20}$$

其中

$$d_k^{(1)}|0\rangle_M = d_k^{(2)}|0\rangle_M = 0, \qquad \forall k。 \tag{4.2.21}$$

先用式 (4.2.9)，再用式 (4.2.20)，求内积 $(\phi, u_k^{(R)})$ 和 $(\phi, u_k^{(L)})$，可得

$$\begin{aligned} b_k^{(1)} &= [2\sinh(\pi\omega/a)]^{-1/2} \left[\mathrm{e}^{\pi\omega/2a} d_k^{(2)} + \mathrm{e}^{-\pi\omega/2a} d_k^{(1)\dagger} \right], \\ b_k^{(2)} &= [2\sinh(\pi\omega/a)]^{-1/2} \left[\mathrm{e}^{\pi\omega/2a} d_k^{(1)} + \mathrm{e}^{-\pi\omega/2a} d_k^{(2)\dagger} \right], \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

用式 (4.2.22) 可导出

$$\left. \begin{array}{l} {}_M\langle 0|b_k^{(1)\dagger} b_k^{(1))}|0\rangle_M \\ {}_M\langle 0|b_k^{(2)\dagger} b_k^{(2)}|0\rangle_M \end{array} \right\} = \frac{\mathrm{e}^{-\pi\omega/a}}{2\sinh(\pi\omega/a)} = (\mathrm{e}^{2\pi\omega/a} - 1)^{-1}。 \tag{4.2.23}$$

定义

$$T_0 \equiv \frac{a}{2\pi k_{\mathrm{B}}} \qquad \text{或在国际单位制中} \quad T_0 \equiv \frac{\hbar a}{2\pi c k_{\mathrm{B}}} \tag{4.2.24}$$

及

$$T = (g_{00})^{-1/2} T_0 = (\mathrm{e}^{2a\xi})^{-1/2} T_0 = \frac{a\mathrm{e}^{-a\xi}}{2\pi k_{\mathrm{B}}}, \tag{4.2.25}$$

可得

$$\left. \begin{array}{l} {}_M\langle 0|b_k^{(1)\dagger} b_k^{(1))}|0\rangle_M \\ {}_M\langle 0|b_k^{(2)\dagger} b_k^{(2)}|0\rangle_M \end{array} \right\} = \left[\exp\left(\frac{\omega}{k_{\mathrm{B}} T_0} \right) - 1 \right]^{-1}, \tag{4.2.26}$$

其中，k_{B} 是玻尔兹曼 (Boltzmann) 常量，T_0 可以解释为热平衡温度，T 则是加速观测者感受到的局域温度 (固有温度)。此加速观测者将在闵可夫斯基真空中接收到温度为 T 的普朗克黑体辐射谱。所以，一个在闵可夫斯基真空中加速的理想温度计将记录下非零的温度，仿佛闵可夫斯基真空是“热”的。这种在闵可夫斯基真空中加速运动的探测器探测到非零温度的效应称为安鲁 (Unruh) 效应，这一温度称为安鲁温度。

要使一个电子在闵可夫斯基真空中感受到 1K 的温度，此电子的固有加速度应达到 $2.4 \times 10^{20}\mathrm{m/s^2} \approx 10^{19} g_{\oplus}$($g_{\oplus}$ 为地球表面重力加速度)! 由此可见，在通常条件下，安鲁效应是极其微弱的，完全无法为人们所察觉。即便是现代技术，也还很难以如此大的加速度加速一个粒子，用于直接探测安鲁温度。尽管如此，2006 年舒

茨霍德 (Schützhold) 等还是利用超强激光场加速电子给出安鲁效应存在的间接证据[20]。

最后，让我们考虑伦德勒时空的拓扑。通过欧化

$$t \to -\mathrm{i}t_{\mathrm{E}}, \quad \eta \to -\mathrm{i}\eta_{\mathrm{E}} \tag{4.2.27}$$

奇异的事件视界 $x^2 - t^2 = 0$ 将收缩为一个奇点 $x^2 + t_{\mathrm{E}}^2 = 0$，它位于 (x, t_{E}) 平面的原点。同时，双曲线 $x^2 - t^2 =$ 常数 > 0，变形为围绕原点的圆周。因为对于加速观测者，事件视界是一个不可穿越 (或达到) 的势垒，所以现在的圆周线不可能连续收缩到原点。因此，虽然惯性观测者认为欧化后的空间的拓扑仍为 $\mathbb{R}^4$，而在加速观测者看来，欧化后的空间拓扑却是 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$。

4.2.3 转动坐标系中的量子场论

在以匀角速度 Ω 转动的柱坐标系中，平直时空的线元是[21]

$$\mathrm{d}s^2 = (1 - \Omega^2 r^2)\mathrm{d}t^2 - 2\Omega r^2 \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}t - r^2 \mathrm{d}\varphi^2 - \mathrm{d}r^2 - \mathrm{d}z^2。 \tag{4.2.28}$$

该度规有基灵矢量场

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{4.2.29}$$

它与以恒定角速度 Ω 绕中心转动的观察者的世界线相切。该基灵矢量场在 $r < \Omega^{-1}$ 时是类时的，任何真实的观察者都需满足此条件。这一条件也定义了转动系的坐标域。在这个转动坐标系下，克莱因–戈登方程为

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Omega\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\varPsi + m^2\varPsi = 0, \tag{4.2.30}$$

其中，m 是标量粒子的质量。方程 (4.2.30) 的模函数是

$$u_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2\pi|2\omega|^{1/2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} \mathrm{e}^{\mathrm{im}\varphi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega - \mathrm{m}\Omega)t} J_{\mathrm{m}}(qr), \tag{4.2.31}$$

其中，ω 是圆频率，$\boldsymbol{k}$ 由 (k, q, m) 给出，k、q 分别是 z、r 方向上的波数，m 是磁量子数，它们满足

$$\omega^2 = k^2 + q^2 + m^2。 \tag{4.2.32}$$

从模函数可以定义 a、$a^\dagger$ 及与其伴随的真空态 $|0\rangle_{\mathbf{rot}}$。研究发现，尽管转动系与惯性系的坐标定义域不同，它们的混频系数是零，转动系中的福克表象与惯性系是相同的，特别是 $|0\rangle_{\mathbf{rot}} = |0\rangle_M$。

4.2.4 具有运动边界的平直时空中的量子场论

我们已看到在匀加速参考系中定义的真空态与惯性参考系中定义的真空态是不同的，它导致加速观测者将在闵可夫斯基真空中接收到普朗克黑体辐射谱。事实上，假如时空具有边界，且边界迅速运动，粒子也会产生出来。

我们以 2 维时空的例子加以说明[22, 23]。

在 2 维时空中，边界或镜子退化成一个反射点。如果镜子沿着下述轨迹运动 (如图 4.3)，即

$$x = z(t),$$

其中

$$z(t)\begin{cases} = 0 & (t < 0) \\ \neq 0, \text{ 但 } \quad |\dot{z}(t)| < 1 & (t > 0) \end{cases} 。\tag{4.2.33}$$

无质量标量场满足场方程

$$\Box\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0, \tag{4.2.34}$$

或

$$\Box\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial u \partial v} = 0, \tag{4.2.35}$$

其中，u 和 v 是类光坐标，即

$$u = t - x, \quad v = t + x, \tag{4.2.36}$$

边界条件是

$$\phi[t, z(t)] = 0。\tag{4.2.37}$$

引入变换

$$\begin{cases} t - x = f(\eta - \xi), \\ t + x = g(\eta + \xi), \end{cases} \tag{4.2.38}$$

或

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{2}(f + g), \\ x = \dfrac{1}{2}(g - f), \end{cases} \tag{4.2.39}$$

图 4.3　2 维时空中的倒退镜子

$$\begin{cases} \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\Big[f'(\eta - \xi)(\mathrm{d}\eta - \mathrm{d}\xi) + g'(\eta + \xi)(\mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\xi)\Big], \\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\Big[g'(\eta + \xi)(\mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\xi) - f'(\eta - \xi)(\mathrm{d}\eta - \mathrm{d}\xi)\Big], \end{cases} \tag{4.2.40}$$

那么

$$\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 = f'(\eta - \xi)g'(\eta + \xi)(\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\xi^2)。\tag{4.2.41}$$

变换之后，场方程变成

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} = 0。\tag{4.2.42}$$

适当选择 f 和 g，总可以使

$$\phi(\eta, 0) = 0。\tag{4.2.43}$$

事实上，我们能证明如下变换就满足 (4.2.43)，即

$$\begin{cases} \xi = x - z(t) = t - u - z(t), \\ \eta = t + z(t)。 \end{cases} \tag{4.2.44}$$

从 (4.2.44) 可得

$$\begin{cases} v = t + x = \eta + \xi & 或 \quad g(\eta + \xi) = \eta + \xi, \\ u = t - x = \eta - \xi - 2z(t) & 或 \quad f(\eta - \xi) = \eta - \xi - 2z(t), \end{cases} \tag{4.2.45}$$

$$\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 = f'(\eta - \xi)(\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\xi^2)。 \tag{4.2.46}$$

满足式 (4.2.43) 的式 (4.2.42) 的模函数是

$$\begin{aligned} u_k^{\text{in}}(u,v) &= \mathrm{i}(4\pi\omega)^{-1/2}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega[u+2z(t)]}\right\} \\ &= \mathrm{i}(4\pi\omega)^{-1/2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\eta-\xi)}\right], \end{aligned} \tag{4.2.47}$$

其中

$$\omega = |k|。$$

定义

$$\tau_u - z(\tau_u) = u, \tag{4.2.48}$$

则式 (4.2.47) 变成

$$u_k^{\text{in}}(u,v) = \mathrm{i}(4\pi\omega)^{-1/2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(2\tau_u - u)}\right], \tag{4.2.49}$$

其中，τ_u 是镜子轨迹与 $u = t - x$ 相交的时刻。在镜子右边的区域，模函数有意义，称为入射态，并以“in”标记之，因为 $t \leqslant 0$ 时，镜子静止于 (u, v) 参考系的 $z = 0$ 处，这时 $\tau_u = u$，式 (4.2.49) 约化成

$$\begin{aligned} u_k^{\text{in}}(u,v) &= \mathrm{i}(4\pi\omega)^{-1/2}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u}] \\ &= (\pi\omega)^{-1/2}\sin(\omega x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \quad (t \leqslant 0), \end{aligned} \tag{4.2.50}$$

它正是关于闵可夫斯基时间 t 的正频模解。式 (4.2.49) 中的第一项是来自 $\mathscr{I}^-$ 的标准平面波，第二项则是反射波。可以清楚地看到，由于镜子的运动，标准的平面入射波被镜子反射后，变得复杂了。在 ϕ 的定义域里，它能展开为

$$\phi = \int_0^\infty \left[a_k u_k^{\text{in}} + a_k^\dagger (u_k^{\text{in}})^*\right] \mathrm{d}k, \tag{4.2.51}$$

入射真空态可用下式定义，

$$a_k|0\rangle_{\text{in}} = 0, \quad \forall k。 \tag{4.2.52}$$

令

$$p(u) = 2\tau_u - u = u + 2z(t_u), \tag{4.2.53}$$

式 (4.2.49) 可以约化成

$$u_k^{\text{in}}(u,v) = \mathrm{i}(4\pi\omega)^{-1/2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega p(u)}\right]。 \tag{4.2.54}$$

类似地，可以证明如下变换也满足式 (4.2.43)，

$$\begin{cases} \xi = x - z(t) = t - u - z(t), \\ \eta = t - z(t)。 \end{cases} \tag{4.2.55}$$

相应的模函数是

$$\begin{aligned} u_k^{\text{out}}(u,v) &= \mathrm{i}(4\pi\omega)^{-1/2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\eta+\xi)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\eta-\xi)}\right] \\ &= \mathrm{i}(4\pi\omega)^{-1/2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(v-2z(t))} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u}\right]。 \end{aligned} \tag{4.2.56}$$

定义

$$\tau_v + z(\tau_v) = v, \tag{4.2.57}$$

其中，τ_v 是镜子的轨迹与 $v = t + x$ 相交的时刻。从式 (4.2.56) 与式 (4.2.57) 可得

$$u_k^{\text{out}} = \mathrm{i}(4\pi\omega)^{-1/2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(2\tau_v - v)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u}\right]。 \tag{4.2.58}$$

我们称它为出射态，并以 out 标记之。类似地，令

$$q(v) = 2\tau_v - v, \tag{4.2.59}$$

则

$$u_k^{\text{out}} = \mathrm{i}(4\pi\omega)^{-1/2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega q(v)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u}\right]。 \tag{4.2.60}$$

ϕ 场也可用 u_k^{out} 及其复共轭展开，即

$$\phi = \int_0^\infty \left[b_k u_k^{\text{out}} + b_k^\dagger (u_k^{\text{out}})^*\right] \mathrm{d}k, \tag{4.2.61}$$

出射真空态则定义为

$$b_k|0\rangle_{\text{out}} = 0, \qquad \forall k。 \tag{4.2.62}$$

u_k^{in} 与 u_k^{out} 之间的博戈留波夫变换是

$$\begin{cases} u_{k'}^{\text{in}} = \displaystyle\int_0^\infty \left[\alpha_{k'k} u_k^{\text{out}} + \beta_{k'k}(u_k^{\text{out}})^*\right] \mathrm{d}k, \\ u_k^{\text{out}} = \displaystyle\int_0^\infty \left[\alpha_{k'k}^* u_{k'}^{\text{in}} - \beta_{k'k}(u_{k'}^{\text{in}})^*\right] \mathrm{d}k', \end{cases} \tag{4.2.63}$$

博戈留波夫系数是

$$\begin{aligned}\alpha_{\omega'\omega} &= (u^{\rm in}_{\omega'}, u^{\rm out}_{\omega}) \\ &= -\mathrm{i}\int_{\sigma(t)} \left[u^{\rm in}_{\omega'}\partial_\mu (u^{\rm out}_{\omega})^* - (u^{\rm out}_{\omega})^*\partial_\mu u^{\rm in}_{\omega'}\right] n^\mu \mathrm{d}\Sigma,\end{aligned} \tag{4.2.64}$$

$$\beta_{\omega'\omega} = \mathrm{i}\int_{\sigma(t)} \left(u^{\rm in}_{\omega'}\partial_\mu u^{\rm out}_{\omega} - u^{\rm out}_{\omega}\partial_\mu u^{\rm in}_{\omega'}\right) n^\mu \mathrm{d}\Sigma, \tag{4.2.65}$$

其中，n^μ 是柯西 (Cauchy) 面的单位法矢量，$\mathrm{d}\Sigma$ 是柯西面的不变面元。

为进一步说明，考虑镜子轨迹在 $t\to\infty$ 时有下列渐近行为

$$z(t) \to -t - A\mathrm{e}^{-2\kappa t} + B, \tag{4.2.66}$$

其中，A、B、κ 是大于零的常数。轨迹 (4.2.66) 可连续地甚至光滑地连接到 $t<0$ 时的静态轨迹，如采用

$$z(t) = -\frac{1}{\kappa}\ln[\cosh(\kappa t)] \tag{4.2.67}$$

就可将 $A=1/\kappa$ 及 $B=(\ln 2)/\kappa$ 的晚期轨迹 (4.2.66) 和 $z=0$ 的早期静态轨迹 C^1 连起来。但需指出，$t\to\infty$ 时渐近区的粒子流与较早期轨迹的具体形式没有什么关系。

由式 (4.2.66) 所示的这类轨迹在几何上特别有趣。这是因为所有 $v>B$ 的射线不受扰动地通向左边的 $\mathcal{J}^+$ 区，只有 $v<B$ 的类光线可以被镜子反射到右边的 $\mathcal{J}^+$ 区，而 $v=B$ 的射线起到视界的作用。追溯右边 $\mathcal{J}^+$ 区中的那些 $u=$ 常数的等间距线，发现它们在被反射之前都沿着 $v=B$ 挤在一起，如图 4.4 所示。

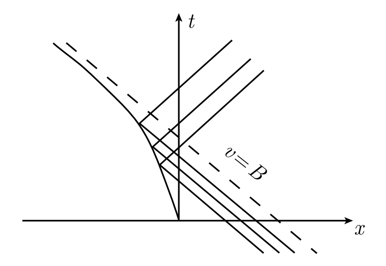


图 4.4　倒退镜子的轨迹渐近于类光线 $v=B$ 时，对光线的反射

博戈留波夫系数可以在任意类空超曲面上计算，例如，在 $t=0$(在 in- 区) 的超曲面上 (此时，$n^\mu=(1,0)$，$\mathrm{d}\Sigma=\mathrm{d}x$)。首先，我们给出 $q(v)$ 的计算。

当 $\tau_v\to\infty$ 时，从式 (4.2.57) 可得

$$\begin{aligned} v-\tau_v &= z(\tau_v) \\ v &\sim B - A\mathrm{e}^{-2\kappa\tau_v} \to B,\end{aligned} \tag{4.2.68}$$

即

$$\tau_v \sim -\frac{1}{2\kappa}\ln\frac{B-v}{A}, \tag{4.2.69}$$

因此

$$q(v) \to -\frac{1}{\kappa}\ln\frac{B-v}{A} - B。 \tag{4.2.70}$$

对于轨迹 (4.2.66)，只需要计算 u_k^{in} 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega q(v)}(v<B)$ 之间的变换。

$$\begin{aligned}
\alpha_{\omega'\omega} &= -\mathrm{i}\int_0^B \left[u_{\omega'}^{\text{in}}\partial_t(u_\omega^{\text{out}})^* - (u_\omega^{\text{out}})^*\partial_t u_{\omega'}^{\text{in}}\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{2\pi(\omega\omega')^{1/2}}\int_0^B \mathrm{d}x\left\{\sin(\omega' x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}\partial_t\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega q(v)}\right] - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega q(v)}\partial_t\left[\sin(\omega' x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}\right]\right\}_{t=0} \\
&= \frac{-1}{2\pi(\omega\omega')^{1/2}}\int_0^B \mathrm{d}x\left\{\sin(\omega' x)(\mathrm{i}\omega\dot{q}(x))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega q(x)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega q(x)}(-\mathrm{i}\omega')\sin(\omega' x)\right\} \\
&= \frac{-1}{2\pi(\omega\omega')^{1/2}}\left[\sin(\omega' x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega q(x)}\Big|_0^B - \int_0^B \omega'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega q(x)}\cos(\omega' x)\mathrm{d}x\right. \\
&\quad \left. +\mathrm{i}\omega'\int_0^B \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega q(x)}\sin(\omega' x)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{-1}{2\pi(\omega\omega')^{1/2}}\sin\omega' B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega q(B)} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\int_0^B \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega q(x)-\mathrm{i}\omega' x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\int_0^B \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega q(x)-\mathrm{i}\omega' x}\mathrm{d}x \qquad (\omega\to\omega+\mathrm{i}\epsilon),
\end{aligned} \tag{4.2.71}$$

其中，最后一行用到 $q(B)=+\infty$。类似地有

$$\begin{aligned}
\beta_{\omega'\omega} &= \mathrm{i}\int_0^B \left(u_{\omega'}^{\text{in}}\partial_t u_\omega^{\text{out}} - u_\omega^{\text{out}}\partial_t u_{\omega'}^{\text{in}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{2\pi(\omega\omega')^{1/2}}\int_0^B \mathrm{d}x\left\{\sin(\omega' x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}\partial_t(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega q(v)})\right. \\
&\quad \left. -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega q(v)}\partial_t\left[\sin(\omega' x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t}\right]\right\}_{t=0} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\int_0^B \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega q(x)-\mathrm{i}\omega' x}\mathrm{d}x, \qquad (\omega\to\omega-\mathrm{i}\epsilon)。
\end{aligned} \tag{4.2.72}$$

$$\begin{aligned}
\left.\begin{matrix}\alpha_{\omega'\omega} \\ \beta_{\omega'\omega}\end{matrix}\right\} &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega D}\int_0^B \mathrm{e}^{\mp\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}\ln(B-x)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega D}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' B}\int_0^B (B-x)^{\mp\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega'(B-x)}\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{4.2.73}$$

其中，$D \equiv \dfrac{\ln A}{\kappa} - B$。若 $y = -\mathrm{i}\omega'(B-x)$，则 $\mathrm{d}y = \mathrm{i}\omega'\mathrm{d}x$, $(x: 0 \to B,\ y: -\mathrm{i}\omega' B \to 0)$

$$
\left.\begin{matrix}\alpha_{\omega'\omega}\\ \beta_{\omega'\omega}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega D - \mathrm{i}\omega' B}(-\mathrm{i}\omega')^{\pm \mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}-1}\int_{-\mathrm{i}\omega' B}^{0} y^{\mp \mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y
$$

$$
= -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\pm\pi\omega/2\kappa}}{(4\pi^2\omega\omega')^{1/2}}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega D - \mathrm{i}\omega' B}(\omega')^{\pm \mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}}\int_0^{\omega' B \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}} \mathrm{e}^{-y} y^{1 \mp \mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa} - 1}\mathrm{d}y。 \tag{4.2.74}
$$

式 (4.2.74) 右边积分的被积函数具有 $\varGamma$ 函数积分表示中被积函数的形式，但因积分上限不具有 $\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(|\alpha| < \pi/2)$ 的形式，所以它不是一个好的、完备的 $\varGamma$ 函数。注意到，$v = B$ 附近，被积函数迅速变化，它等价于 ω' 很大，所以在上面的积分中可近似地令 $\omega' \to \infty$，再将积分上限的辐角从 $-\pi/2$ 变到 $-\pi/2 + \mathrm{i}\epsilon$，并在计算的最后令 $\epsilon \to 0^+$，从而得到一个通常的 $\varGamma$ 函数，即

$$
\left.\begin{matrix}\alpha_{\omega'\omega}\\ \beta_{\omega'\omega}\end{matrix}\right\} = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\pm\pi\omega/2\kappa}}{(4\pi^2\omega\omega')^{1/2}}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega D - \mathrm{i}\omega' B}(\omega')^{\pm \mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}}\Gamma\left(1 \mp \mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}\right)。 \tag{4.2.75}
$$

这样

$$
|\beta_{\omega'\omega}|^2 = \frac{\mathrm{e}^{-\pi\omega/\kappa}}{4\pi^2\omega\omega'}\varGamma\left(1 + \mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}\right)\varGamma\left(1 - \mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\pi\omega/\kappa}}{4\pi^2\omega\omega'}\frac{\mathrm{i}\pi\omega/\kappa}{\sin(\mathrm{i}\pi\omega/\kappa)}, \tag{4.2.76}
$$

其中，已用了公式

$$
\varGamma(1+z)\varGamma(1-z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z}。 \tag{4.2.77}
$$

令 $k_{\mathrm{B}}T = \dfrac{\kappa}{2\pi}$，则有

$$
|\beta_{\omega'\omega}|^2 = \frac{\mathrm{e}^{-\omega/2k_{\mathrm{B}}T}}{4\pi^2\omega\omega'}\frac{\mathrm{i}\pi\omega/\kappa}{\mathrm{i}\sinh\dfrac{\omega}{2k_{\mathrm{B}}T}} = \frac{1}{2\pi\omega'\kappa}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\omega}{k_{\mathrm{B}}T}} - 1}。 \tag{4.2.78}
$$

易见，

$$
{}_{\mathrm{in}}\langle 0|N_\omega|0\rangle_{\mathrm{in}} = \int_0^\infty |\beta_{\omega'\omega}|^2\mathrm{d}\omega' \tag{4.2.79}
$$

是对数发散，这是因为镜子在所有时间连续加速，造成稳定的辐射流在每个模式中聚集了无穷数目的量子。

在两个运动镜子之间区域中的粒子产生问题也可用类似办法处理[22, 24]。

4.3　渐近闵可夫斯基流形上的福克表象

我们已看到，在闵可夫斯基流形的惯性系中可以定义一个唯一的、物理的福克表象。这一节，我们讨论在渐近闵可夫斯基时空区上定义福克表象及其物理效应。

4.3.1 一个渐近平直的宇宙模型

让我们考虑一个 2 维共形平直的宇宙模型

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\mathrm{d}x^2 = C^2(\eta)\Big(\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}x^2\Big), \tag{4.3.1}$$

其中

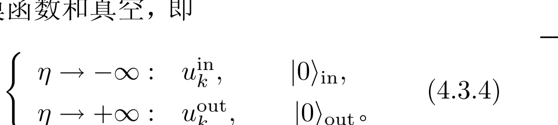
$$t = \int^{\eta} C(\eta')\mathrm{d}\eta', \quad C^2(\eta) = a^2(t(\eta))。 \tag{4.3.2}$$

假定

$$C^2(\eta) = A + B\tanh(\rho\eta), \tag{4.3.3}$$

其中，A、B、ρ 是大于零的常数，且 $A > B$。当 $\eta \to \pm\infty$ 时，$C^2(\eta) \to A \pm B$(图 4.5)，它们定义了这个时空的两个渐近闵可夫斯基时空区。

在渐近闵可夫斯基时空区，可以定义唯一的模函数和真空，即



$$\begin{cases} \eta \to -\infty: & u_k^{\text{in}}, & |0\rangle_{\text{in}}, \\ \eta \to +\infty: & u_k^{\text{out}}, & |0\rangle_{\text{out}}。 \end{cases} \tag{4.3.4}$$

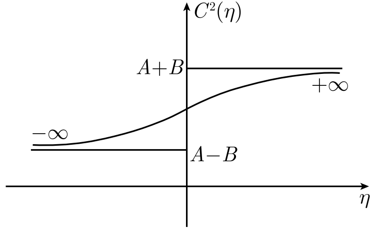


图 4.5 共形因子的变化曲线

现在计算上面两个福克表象间的 β_{ij}。

考虑标量场方程

$$(\Box + m^2 + \xi R)\phi(x) = 0, \tag{4.3.5}$$

其中，ξ 是一个耦合常数，$\xi = 0$ 称为最小耦合，

$$\xi = \frac{1}{4}\frac{n-2}{n-1} \tag{4.3.6}$$

称为共形耦合，当时空维数 $n = 2$ 时，共形耦合就是最小耦合。这里只考虑 $\xi = 0$ 的情况。设方程 (4.3.5) 具有如下形式的分离变量解，即

$$u_k(\eta, x) = (2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\chi_k(\eta), \tag{4.3.7}$$

其中，$\chi(\eta)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\eta^2}\chi_k(\eta) + \Big[k^2 + C^2(\eta)m^2\Big]\chi_k(\eta) = 0 \tag{4.3.8}$$

和渐近条件：当 $\eta \to \pm\infty$ 时，有

$$u_k^{\text{in(out)}}(\eta, x) \to (2\pi\omega_{\text{in(out)}})^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega_{\text{in(out)}}\eta}。 \tag{4.3.9}$$

于是，式 (4.3.5) 的模解可表示为

$$\begin{aligned}u_k^{\text{in}}(\eta,x) = &(4\pi\omega_{\text{in}})^{-1/2}\exp\left\{\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega_+\eta - \mathrm{i}\frac{\omega_-}{\rho}\ln[2\cosh(\rho\eta)]\right\}\\ &\times F\left(1+\mathrm{i}\frac{\omega_-}{\rho},\mathrm{i}\frac{\omega_-}{\rho},1-\mathrm{i}\frac{\omega_{\text{in}}}{\rho},\frac{1+\tanh(\rho\eta)}{2}\right),\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

其中，F 是超几何函数。

$$\begin{aligned}\omega_{\text{in}} &= \left[k^2 + m^2(A-B)\right]^{1/2},\\ \omega_{\text{out}} &= \left[k^2 + m^2(A+B)\right]^{1/2},\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\omega_{\text{out}} \pm \omega_{\text{in}}), \tag{4.3.12}$$

$$\begin{aligned}&\omega_{\text{in}} \to \omega_{\text{out}},\\ &1-\mathrm{i}\frac{\omega_{\text{in}}}{\rho} \to 1+\mathrm{i}\frac{\omega_{\text{out}}}{\rho},\\ &\frac{1+\tanh(\rho\eta)}{2} \to \frac{1-\tanh(\rho\eta)}{2}。\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

在 $u_k^{\text{in}}(\eta,x)$ 中作以下改变即为 $u_k^{\text{out}}(\eta,x)$。

利用超几何函数的线性变换性质，可写出

$$u_k^{\text{in}}(\eta,x) = \alpha_k u_k^{\text{out}}(\eta,x) + \beta_k u_{-k}^{\text{out}*}(\eta,x), \tag{4.3.14}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \left(\frac{\omega_{\text{out}}}{\omega_{\text{in}}}\right)^{1/2}\frac{\Gamma\left(1-\mathrm{i}\frac{\omega_{\text{in}}}{\rho}\right)\Gamma\left(-\mathrm{i}\frac{\omega_{\text{out}}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(-\mathrm{i}\frac{\omega_+}{\rho}\right)\Gamma\left(1-\mathrm{i}\frac{\omega_+}{\rho}\right)},\\ \beta_k &= \left(\frac{\omega_{\text{out}}}{\omega_{\text{in}}}\right)^{1/2}\frac{\Gamma\left(1-\mathrm{i}\frac{\omega_{\text{in}}}{\rho}\right)\Gamma\left(\mathrm{i}\frac{\omega_{\text{out}}}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\mathrm{i}\frac{\omega_-}{\rho}\right)\Gamma\left(1+\mathrm{i}\frac{\omega_-}{\rho}\right)},\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

或

$$|\alpha_k|^2 = \frac{\sinh^2\left(\pi\frac{\omega_+}{\rho}\right)}{\sinh\left(\pi\frac{\omega_{\text{in}}}{\rho}\right)\sinh\left(\pi\frac{\omega_{\text{out}}}{\rho}\right)}, \tag{4.3.16}$$

$$|\beta_k|^2 = \frac{\sinh^2\left(\pi\frac{\omega_-}{\rho}\right)}{\sinh\left(\pi\frac{\omega_{\text{in}}}{\rho}\right)\sinh\left(\pi\frac{\omega_{\text{out}}}{\rho}\right)}。 \tag{4.3.17}$$

由式 (4.3.11)、式 (4.3.12) 及式 (4.3.17) 可知，当 $m=0$，即对于共形不变的标量场，有

$$\omega_- = 0 \qquad 或 \qquad |\beta_k|^2 = 0,$$

这就是说，在渐近闵可夫斯基的共形平直时空中，不会有共形不变的标量粒子从真空中产生；当 $m \neq 0$，即对于非共形不变的标量场 (这里可看成是最小耦合标量场)，有

$$\omega_- \neq 0 \qquad 或 \qquad |\beta_k|^2 \neq 0,$$

这就是说，在渐近闵可夫斯基的共形平直时空中，有最小耦合标量粒子从真空中产生。问题是，最小耦合标量粒子是什么时候产生的？是如何产生的？一种合理的回答是，这些粒子在中间膨胀相时期由引力场产生。

一个自然的推论是：在共形平直的膨胀时空中，没有共形不变标量粒子的产生，但有包括最小耦合标量粒子在内的非共形不变粒子的产生。

4.3.2　施瓦西黑洞

对于施瓦西黑洞 (SBH)，$\mathcal{J}^{\pm}$ 是渐近闵可夫斯基时空区，因此我们可以用施瓦西坐标明确地定义真空 $|0\rangle_{\mathcal{J}^+} \equiv |0\rangle_{\rm out}$ 和 $|0\rangle_{\mathcal{J}^-} \equiv |0\rangle_{\rm in}$。现在的问题是，$|0\rangle_{\rm in}$ 是否等价于 $|0\rangle_{\rm out}$？假如不同，如何计算混频系数 β_{ji}？这个问题于 1974 年被霍金 (Hawking) 巧妙地解答了[25, 26]。现在我们来介绍这个被称为黑洞霍金蒸发的重要发现。

考虑一颗正在坍缩成施瓦西黑洞的星体，时空区 I 的柯西面是 $\mathcal{J}^-$ 和 I^-，在坍缩情况中，H^- 不属于 I 区的柯西面 (图 4.6)。

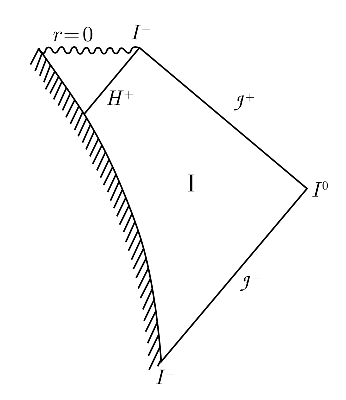


图 4.6　星体坍缩成施瓦西黑洞的彭罗斯图

设入射标量波在 $\mathcal{J}^-$ 附近 ($t \to -\infty$，$r \to +\infty$) 有正、负频解，即

$$f_{\omega l m}(r,\theta,\phi,t), \qquad f^*_{\omega l m}(r,\theta,\phi,t), \tag{4.3.18}$$

任何标量波函数可以用它们展开为

$$\phi(x) = \sum_{l,\mathrm{m}} \int \mathrm{d}\omega (a_{\omega l\mathrm{m}} f_{\omega l\mathrm{m}} + a^{\dagger}_{\omega l\mathrm{m}} f^{*}_{\omega l\mathrm{m}}), \tag{4.3.19}$$

真空 $|0\rangle_{\mathrm{in}}$ 被定义为

$$a_{\omega l\mathrm{m}}|0\rangle_{\mathrm{in}} = 0, \quad \forall \omega, l, \mathrm{m}。 \tag{4.3.20}$$

$t \to +\infty$ 时的出射标量波可以出现在 $\mathscr{I}^+$ 附近 ($t \to +\infty$，$r \to +\infty$) 和 H^+ 附近 $(t \to +\infty, r = 2M)$ 两个地方，因此 $t \to +\infty$ 时的正、负频解是

$$\begin{aligned} &\text{在}\mathscr{I}^+, \qquad (p_{\omega l\mathrm{m}}, p^{*}_{\omega l\mathrm{m}}), \\ &\text{在}H^+, \qquad (q_{\omega l\mathrm{m}}, q^{*}_{\omega l\mathrm{m}})。 \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

任何标量波函数可以用它们展开为

$$\phi(x) = \sum_{l,\mathrm{m}} \int \mathrm{d}\omega (b_{\omega l\mathrm{m}} p_{\omega l\mathrm{m}} + b^{\dagger}_{\omega l\mathrm{m}} p^{*}_{\omega l\mathrm{m}} + c_{\omega l\mathrm{m}} q_{\omega l\mathrm{m}} + c^{\dagger}_{\omega l\mathrm{m}} q^{*}_{\omega l\mathrm{m}})。 \tag{4.3.22}$$

现在的问题是计算波在 $\mathscr{I}^+$ 和 $\mathscr{I}^-$ 附近的 β_{ji}，或者

$${}_{\mathrm{in}}\langle 0|N^{\mathrm{out}}_{\omega l\mathrm{m}}|0\rangle_{\mathrm{in}} = {}_{\mathrm{in}}\langle 0|b^{\dagger}_{\omega l\mathrm{m}} b_{\omega l\mathrm{m}}|0\rangle_{\mathrm{in}} = \int \mathrm{d}\omega' |\beta_{\omega l\mathrm{m},\omega' l\mathrm{m}}|^2, \tag{4.3.23}$$

其中

$$\beta_{\omega l\mathrm{m},\omega' l\mathrm{m}} = -(p_{\omega l\mathrm{m}}, f^{*}_{\omega' l\mathrm{m}})。 \tag{4.3.24}$$

为了简单，让我们考虑球对称坍缩期间无质量标量粒子的产生。终态度规是施瓦西真空度规

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{2.4.1}$$

对无质量中性标量场，用分离变量法来解克莱因–戈登方程

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = 0, \tag{4.3.25}$$

即设模函数具有如下形式

$$\phi \sim \frac{1}{r} R_{\omega l}(r) \mathrm{Y}_{l\mathrm{m}}(\Omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{4.3.26}$$

其中，$Y_{l\mathrm{m}}$ 是球谐函数，$R_{\omega l}$ 是径向方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r_*^2} R_{\omega l} + \left\{\omega^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right]\right\} R_{\omega l} = 0 \tag{4.3.27}$$

的解，其中

$$r_* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \tag{4.3.28}$$

称为乌龟坐标，记

$$\begin{aligned}&H \equiv \omega^2\\&V \equiv \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2M}{r^3}\right] \sim \text{有效势},\end{aligned} \tag{4.3.29}$$

式 (4.3.27) 可以写成定态薛定谔 (Schrödinger) 方程的形式，即

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r_*^2}R_{\omega l}+\{H-V\}R_{\omega l}=0。 \tag{4.3.30}$$

当 $r \to 2M$(或 $r_* \to -\infty$) 和 $r \to +\infty$(或 $r_* \to +\infty$) 时，$V \to 0$，因此在 $r \to +\infty$ 区的解是出射波

$$p_{\omega l\mathrm{m}}=\frac{N}{\omega^{1/2}r}\exp(-\mathrm{i}\omega u)\mathrm{Y}_{l\mathrm{m}}(\theta,\varphi) \tag{4.3.31}$$

和入射波

$$f_{\omega l\mathrm{m}}=\frac{N}{\omega^{1/2}r}\exp(-\mathrm{i}\omega v)\mathrm{Y}_{l\mathrm{m}}(\theta,\varphi), \tag{4.3.32}$$

其中，$N=\dfrac{1}{2\sqrt{2}\pi}$，$u=t-r_*$，$v=t+r_*$ 都是类光坐标。在此双类光坐标下，施瓦西度规是

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v-r^2\mathrm{d}\Omega^2。 \tag{4.3.33}$$

无质量标量入射波 $f_{\omega l\mathrm{m}}$ 从 $\mathcal{J}^-$ 附近出发，沿类光世界线 $v=$ 常数传播，穿过坍缩星的中心，然后“反射”沿 $u=$ 常数的类光世界线前往 $\mathcal{J}^+$(图 4.7)。由于星体的坍缩可以对出射波造成极大的红移，所以入射波

$$f_{\omega' l\mathrm{m}}=r^{-1}\exp\left(\pm\mathrm{i}\omega' v\right)\mathrm{Y}_{l\mathrm{m}}$$

必须有极高的频率 ω'，因此我们可以用几何光学近似来讨论上述过程。

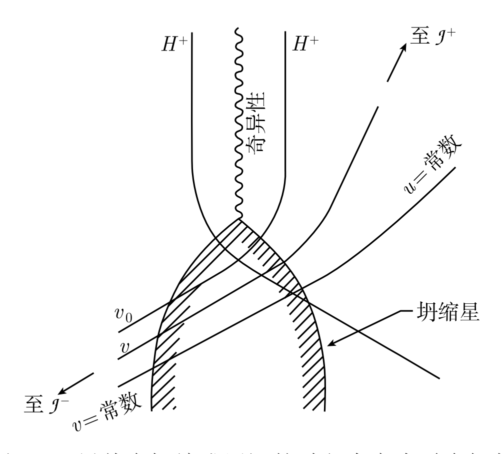


图 4.7　星体在坍缩成黑洞的过程中产生霍金辐射

我们需要找出函数关系

$$u = u(v)。$$

为此，先设 $v = v_0$ 是一个特定的入射波，它穿过星体中心变为“反射波”，投射到坍缩星体表面变成事件视界 H^+，所有晚于 v_0 的入射波均因进入视界而不能被“反射”，只有 $v < v_0$ 的入射波才可以被“反射”成为出射波。

第二步，在 H^+ 的一点上画一个未来指向的类光矢量 n^μ，用一个矢量 $-\epsilon n^\mu$(ϵ 是一个小的正值量) 连接这点和一条临近的大 u 值的类光世界线。为进一步讨论，我们将彭罗斯图 (图 4.6) 作如下“补全”：将 H^+ 向下延伸，并与假想的 H^- 相交 (图 4.8)，沿 H^+ 的延长线平行移动矢量 $-\epsilon n^\mu$ 到 H^+ 与 H^- 的交点。这时，该矢量完全躺在 H^- 上。设 $\lambda = -b\mathrm{e}^{-\kappa_{\mathrm{G}} u}$ 是 H^- 上的仿射参量 (此处 $\kappa_{\mathrm{G}} = 1/(4M)$ 是黑洞事件视界上的表面引力，常数 $b > 0$)， 依定义在H^+ 与 H^- 的交点处 $\lambda = 0$，在 H^- 上 $\lambda < 0$。在交点的邻域内，引进一个局部惯性系 $\{x^\mu\}$。在此系中，$n^\mu = \dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$，且光迹是一条直线，所以

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{\mathrm{d}n^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = 0, \tag{4.3.34}$$

或者说在 $\lambda = 0$ 的邻域内 n^μ 是一个常矢量。矢量 $-\epsilon \boldsymbol{n}^\mu$ 在 H^- 上的长度是

$$-\epsilon n^\mu = \int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda = n^\mu \lambda = x^\mu(\lambda) - x^\mu(0)。 \tag{4.3.35}$$

由式 (4.3.35) 和 λ 的定义可以发现

$$\epsilon = -\lambda = b\mathrm{e}^{-\kappa_{\mathrm{G}} u}。 \tag{4.3.36}$$

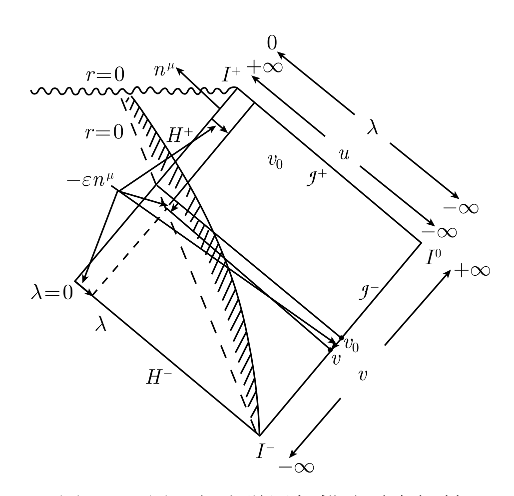


图 4.8　用几何光学近似描述霍金辐射

第三步，移动这个矢量返回到它的初始位置，即沿 H^+ 的延长线平移矢量 $-\epsilon n^\mu$ 到 v_0 和 H^+ 的交点。如前所述，矢量 $-\epsilon n^\mu$ 定义一条视界之外临近视界的具有大 u 值的类光世界线。追溯这条类光世界线，经 $r=0$ 到极早期的大 r 处，同时矢量 $-\epsilon n^\mu$ 也平行移动到 $\mathcal{J}^-$。因为平移保持矢量与测地线的夹角不变，所以像图 4.8 显示的那样，矢量 $-\epsilon n^\mu$躺在 $\mathcal{J}^-$ 上连接v_0 和一定的 v，因此

$$v - v_0 = -\epsilon n^\mu。\tag{4.3.37}$$

在 $r\to\infty$ 处，时空是平直的，光线的切矢 $n^\mu = \dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ 是一个常矢量，其长度为D，即

$$v - v_0 = -\epsilon D = -bD\mathrm{e}^{-\kappa_{\mathrm{G}} u}。\tag{4.3.38}$$

所以，未知函数 $u=u(v)$ 就是

$$u = -\frac{1}{\kappa_{\mathrm{G}}}\ln\left|\frac{v_0 - v}{bD}\right|。\tag{4.3.39}$$

利用式 (4.3.39)，出射波

$$p_{\omega l\mathrm{m}} = \frac{N}{\omega^{1/2} r}\exp\left(-\mathrm{i}\omega u\right)\mathrm{Y}_{l\mathrm{m}}$$

可以写成

$$p_{\omega l\mathrm{m}} = \begin{cases} \dfrac{N}{\omega^{1/2} r}\left(\dfrac{v_0 - v}{bD}\right)^{\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa_{\mathrm{G}}}}\mathrm{Y}_{l\mathrm{m}} & (v < v_0) \\ 0 & (v > v_0) \end{cases}。\tag{4.3.40}$$

另一方面，由于入射波

$$f_{\omega l\mathrm{m}} = \frac{N}{\omega^{1/2} r}\exp\left(-\mathrm{i}\omega v\right)\mathrm{Y}_{l\mathrm{m}}$$

及其复共轭是完备的，$p_{\omega l\mathrm{m}}$ 可用 $\{f_{\omega l\mathrm{m}}, f^*_{\omega l\mathrm{m}}\}$ 展开，即

$$p_{\omega l\mathrm{m}} = \sum_{l'\mathrm{m}'}\int \mathrm{d}\omega'\left[\alpha_{\omega l\mathrm{m},\omega' l'\mathrm{m}'} f_{\omega' l'\mathrm{m}'} + \beta_{\omega l\mathrm{m},\omega' l'\mathrm{m}'} f^*_{\omega' l'\mathrm{m}'}\right],\tag{4.3.41}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{\omega l\mathrm{m},\omega' l\mathrm{m}} &= (p_{\omega l\mathrm{m}}, f_{\omega' l\mathrm{m}}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{v_0}\mathrm{d}v\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\exp\left(\mathrm{i}\omega' v\right)\left(\frac{v_0 - v}{bD}\right)^{\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa_{\mathrm{G}}}}, \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}(bD)^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa_{\mathrm{G}}}}(\mathrm{i}\omega')^{-1-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa_{\mathrm{G}}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' v_0}\int_{v_0 - v = 0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\xi}\xi^{1+\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}-1}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}(bD)^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa_{\mathrm{G}}}}(\mathrm{i}\omega')^{-1-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa_{\mathrm{G}}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' v_0}\mathit{\Gamma}\left(1 + \frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa_{\mathrm{G}}}\right),\end{aligned}\tag{4.3.42}$$

其中 $\xi = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\mathrm{i}(\omega' - \mathrm{i}\epsilon)(v_0 - v)$，$\epsilon > 0$，

$$\beta_{\omega l\mathrm{m},\omega' l\mathrm{m}} = -(p_{\omega l\mathrm{m}}, f^*_{\omega' l\mathrm{m}}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{v_0} \mathrm{d}v \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2} \exp\left(-\mathrm{i}\omega' v\right)\left(\frac{v_0 - v}{bD}\right)^{\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa_\mathrm{G}}}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2} (bD)^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa_\mathrm{G}}} (-\mathrm{i}\omega')^{-1-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa_\mathrm{G}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' v_0}\Gamma\left(1 + \frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa_\mathrm{G}}\right)。 \tag{4.3.43}$$

显然我们有 (略去脚标 lm)

$$\beta_{\omega\omega'} = -\mathrm{i}\alpha_{\omega(-\omega')}。 \tag{4.3.44}$$

其中，$\alpha_{\omega(-\omega')}$ 可以认为是 $\alpha_{\omega\omega'}$ 到负 ω' 轴的延拓。因 $\alpha_{\omega\omega'}$ 在下半复 ω' 平面有定义，必须沿下半复 ω' 平面的半圆周把 ω' 延拓到负轴，即

$$\omega' \to \omega' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}, \tag{4.3.45}$$

$$\alpha_{\omega(-\omega')} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\right)^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa_\mathrm{G}}-1}\alpha_{\omega\omega'} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi\frac{\omega}{\kappa_\mathrm{G}}}\alpha_{\omega\omega'}。 \tag{4.3.46}$$

所以，

$$\beta^*_{\omega\omega'}\beta_{\omega\omega'} = \mathrm{e}^{-2\pi\frac{\omega}{\kappa_\mathrm{G}}}\alpha^*_{\omega\omega'}\alpha_{\omega\omega'}。 \tag{4.3.47}$$

从 $(p_\omega, p_\omega) = 1$ 或式 (4.1.16) 的第一式

$$\int \mathrm{d}\omega' \left[(\alpha^*_{\omega\omega'}\alpha_{\omega\omega'}) - (\beta^*_{\omega\omega'}\beta_{\omega\omega'})\right] = 1, \tag{4.3.48}$$

可得

$$_\mathrm{in}\langle 0|N^\mathrm{out}_{\omega l\mathrm{m}}|0\rangle_\mathrm{in} = \int \mathrm{d}\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2 = \left[\exp\left(\frac{\omega}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1\right]^{-1}, \tag{4.3.49}$$

其中

$$T \equiv \frac{\kappa_\mathrm{G}}{2\pi k_\mathrm{B}} = \frac{\hbar\kappa_\mathrm{G}}{2\pi k_\mathrm{B} c}, \qquad \kappa_\mathrm{G} = \frac{1}{4M} = \frac{c^4}{4GM}。 \tag{4.3.50}$$

这就是著名的霍金热辐射公式。它表明，如果施瓦西黑洞有用 $T \equiv \kappa_\mathrm{G}/(2\pi k_\mathrm{B})$ 定义的温度，就是一个黑体，会产生相应的黑体辐射。

上面的处理方式只能用于坍缩星。现在我们给出施瓦西黑洞霍金蒸发的另一个更为一般的推导。

首先，考虑用克鲁斯卡尔坐标表示出的施瓦西度规

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{32}{r}M^3\mathrm{e}^{-r/2M}\left(\mathrm{d}\mathcal{T}^2 - \mathrm{d}\mathcal{R}^2\right) - r^2\mathrm{d}\Omega^2, \tag{4.3.51}$$

其中

$$\mathcal{T} = \left(\frac{r}{2\mathcal{M}} - 1\right)^{1/2}\mathrm{e}^{r/4M}\sinh\frac{t}{4M}, \qquad r > 2M, \tag{4.3.52}$$

$$\mathcal{R} = \left(\frac{r}{2\mathcal{M}} - 1\right)^{1/2}\mathrm{e}^{r/4M}\cosh\frac{t}{4M}, \qquad r > 2M。 \tag{4.3.53}$$

现在把实时间延拓到虚时间 $t=-\mathrm{i}t_{\mathrm{E}}$，或 $t_{\mathrm{E}}=\mathrm{i}t$，那么

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathrm{E}}=\mathrm{i}\mathcal{T}&=\left(\frac{r}{2\mathcal{M}}-1\right)^{1/2}\mathrm{e}^{r/4M}\sin\frac{t_{\mathrm{E}}}{4M},\\ \mathcal{R}&=\left(\frac{r}{2\mathcal{M}}-1\right)^{1/2}\mathrm{e}^{r/4M}\cos\frac{t_{\mathrm{E}}}{4M},\end{aligned}\tag{4.3.54}$$

于是，洛伦兹型的施瓦西度规变成了欧几里得型的施瓦西度规 ($\mathrm{d}s=-\mathrm{i}\mathrm{d}s_{\mathrm{E}}$，$\mathcal{T}=-\mathrm{i}\mathcal{T}_{\mathrm{E}}$)，即

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{E}}^2=\frac{32}{r}M^3\mathrm{e}^{-r/2M}\left(\mathrm{d}\mathcal{T}_{\mathrm{E}}^2+\mathrm{d}\mathcal{R}^2\right)+r^2\mathrm{d}\Omega^2,\qquad r>2M。\tag{4.3.55}$$

虚时 t_{E} 是周期为 $8\pi M$ 的角坐标，流形上的每一个连续函数对 t_{E} 也应是周期为 $8\pi M$ 的周期函数。作为特例，洛伦兹型施瓦西时空中的费曼 (Feynman) 传播子，如果通过解析延拓定义为欧几里得格林 (Green) 函数，它将自动地成为虚时 $t_{\mathrm{E}}=\mathrm{i}t$ 的周期函数。然而，这正是实标量场温度格林函数的重要性质[1, 27, 28]：

$$G_T\left(x^i,t\right)=G_T\left(x^i,t+\mathrm{i}\beta\right),\tag{4.3.56}$$

其中

$$\beta=8\pi M=\frac{2\pi}{\kappa_{\mathrm{G}}}=\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T},$$

所以有

$$T=\frac{\kappa_{\mathrm{G}}}{2\pi k_{\mathrm{B}}}。\tag{4.3.57}$$

这个结果建议，在施瓦西时空未来视界外部存在温度为 $T=\kappa_{\mathrm{G}}/(2\pi k_{\mathrm{B}})$ 的量子场的热平衡态。然而，仅当施瓦西黑洞是一个黑体并产生相应的热辐射的时候，施瓦西黑洞与其外界的热平衡才是可能的。

对于更一般的场，温度格林函数满足[1, 27, 28]

$$G_T\left(x^i,t\right)=\mathrm{e}^{\mu\beta}\left(-1\right)^{2s}G_T\left(x^i,t+\mathrm{i}\beta\right),\tag{4.3.58}$$

其中，μ 为化学势，s 是粒子的自旋。这样，欧几里得版的施瓦西解的特性强烈建议施瓦西黑洞的粒子产生具有热性质。

可以证明，对于克尔–纽曼黑洞有

$$\kappa_{\mathrm{G}}=\frac{r_+-r_-}{2\left(r_+^2+a^2\right)},\qquad T=\frac{\kappa_{\mathrm{G}}}{2\pi k_{\mathrm{B}}},\tag{4.3.59}$$

式中 $r_\pm=M\pm\sqrt{M^2-a^2-Q^2}$ 是克尔–纽曼黑洞的视界，a 为单位质量的角动量，Q 为电荷。

4.4　一般情况的福克表象

事实上，上述时空的霍金蒸发效应并非渐近平直黑洞时空所独有，对于静态德西特时空也有

$$\kappa_{\mathrm{G}}=\sqrt{\frac{\Lambda}{3}},\qquad T=\frac{1}{2\pi k_{\mathrm{B}}}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}。\tag{4.4.1}$$

更一般地，可以证明：不依赖于时空度规的具体形式，任何具有未来视界的静态或稳态时空，必定存在霍金蒸发[29, 30]。

一般说来，时空可能没有渐近闵可夫斯基时空区，这时应按如下方式来讨论。为比较确定起见，我们考虑空间平直的 FWR 宇宙

$$\mathrm{d}s^2=C^2(\eta)\left(\mathrm{d}\eta^2-\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right)。\tag{4.4.2}$$

由于空间截面的均匀性，共形耦合标量场方程

$$\left(\Box+m^2+\frac{1}{6}R\right)\phi=0\tag{4.4.3}$$

的模解具有如下形式：

$$u_{\boldsymbol{k}}(x)=(2\pi)^{-3/2}C^{-1}(\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_ix^i}\chi_k(\eta),\tag{4.4.4}$$

其中，$k=|\boldsymbol{k}|$，χ_k 是方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\chi_k(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2}+\omega_k^2(\eta)\chi_k(\eta)=0\tag{4.4.5}$$

的解，此处

$$\omega_k^2(\eta)=k^2+C^2(\eta)m^2。\tag{4.4.6}$$

式 (4.4.5) 正是频率随时间变化的谐振子的经典运动方程。让式 (4.4.5) 的解具有 WKB[文策–克拉默斯–布里渊 (Wentzel-Kramers-Brillouin)] 近似解的形式，即

$$\chi_k(\eta)=[2W_k(\eta)]^{-1/2}\exp\left[-\mathrm{i}\int^{\eta}W_k(\eta')\,\mathrm{d}\eta'\right],\tag{4.4.7}$$

其中，$W_k(\eta)$ 满足非线性方程

$$W_k^2(\eta)=\omega_k^2(\eta)-\frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{W}_k}{W_k}-\frac{3}{2}\frac{\dot{W}_k^2}{W_k^2}\right)。\tag{4.4.8}$$

在时空缓慢变化的情况，可用迭代法近似求解非线性方程 (4.4.8)。

(1) 零级近似。

当 $\dot{W}_k$ 和 $\ddot{W}_k$ 很小时，可令

$$W_k^{(0)}(\eta) = \omega_k(\eta), \tag{4.4.9}$$

则

$$\chi_k^{(0)}(\eta) = [2\omega_k(\eta)]^{-1/2} \exp\left[-\mathrm{i}\int^{\eta} \omega_k(\eta')\,\mathrm{d}\eta'\right]。 \tag{4.4.10}$$

显然，当 $C(\eta)$ 趋于常数时，该解趋于闵可夫斯基时空的结果。

(2) 一级近似。

令

$$\left[W_k^{(1)}(\eta)\right]^2 = \omega_k^2(\eta) - \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{\omega}_k}{\omega_k} - \frac{3}{2}\frac{\dot{\omega}_k^2}{\omega_k^2}\right), \tag{4.4.11}$$

则

$$\chi_k^{(1)}(\eta) = \left[2W_k^{(1)}(\eta)\right]^{-1/2} \exp\left[-\mathrm{i}\int^{\eta} W_k^{(1)}(\eta')\,\mathrm{d}\eta'\right]。 \tag{4.4.12}$$

(3) A 级近似。

令

$$\left[W_k^{(A)}(\eta)\right]^2 = \omega_k^2(\eta) - \frac{1}{2}\left[\frac{\ddot{W}_k^{(A-1)}}{W_k^{(A-1)}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dot{W}_k^{(A-1)}}{W_k^{(A-1)}}\right)^2\right], \tag{4.4.13}$$

则

$$u_{\boldsymbol{k}}^{(A)}(\eta) = (2\pi)^{-3/2} C^{-1}(\eta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i x^i} \chi_k^{(A)}(\eta), \tag{4.4.14}$$

其中，$\chi_k^{(A)}(\eta)$ 和 $u_{\boldsymbol{k}}^{(A)}(\eta)$ 被称为 $\chi_k(\eta)$ 和 $u_{\boldsymbol{k}}(\eta)$ 的第 A 级绝热近似 (有时也称为第 $2A$ 绝热阶，这时绝热阶等于 C^2 对 η 的导数的阶。为方便起见，我们仍用前一种叫法)。

一般来说，可用一组绝热近似的模 $\{u_{\boldsymbol{k}}^{(A)}, u_{\boldsymbol{k}}^{(A)*}\}$ 来定义场方程 (4.4.3) 的严格模解则有

$$u_{\boldsymbol{k}}(\eta) = \alpha_k^{(A)}(\eta)\,u_{\boldsymbol{k}}^{(A)}(\eta) + \beta_k^{(A)}(\eta)\,u_{\boldsymbol{k}}^{(A)*}(\eta), \tag{4.4.15}$$

其中，$\alpha_k^{(A)}$ 和 $\beta_k^{(A)}$ 对 A 级绝热近似是常数 (对 $A+1$ 级绝热近似是依赖于 η 的变量)。注意，式 (4.4.15) 对 (A) 不求和。如果 $u_{\boldsymbol{k}}^{(A)}$ 是 $u_{\boldsymbol{k}}$ 的好近似，则应该存在 η_0，在 η_0 附近有

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(A)}(\eta \to \eta_0) &= 1 + \left[(A+1)\ \text{或更高的阶}\right], \\ \beta_k^{(A)}(\eta \to \eta_0) &= 0 + \left[(A+1)\ \text{或更高的阶}\right]。 \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

由式 (4.4.15) 和式 (4.4.16) 定义的 (精确) 模解 $u_{\boldsymbol{k}}$ 称为 A 级绝热正频模。

由这样定义的精确模 $u_{\boldsymbol{k}}$ 可进一步定义一个真空，称为 A 级绝热真空。

为比较绝热模与标准模的异同，我们还是先看时空具有入射和出射渐近闵可夫斯基区的情况。对于这种情况，有两种方案可资利用。

(1) 在入射和出射渐近闵可夫斯基区，精确模 $u_{\boldsymbol{k}}^{\text{in/out}}$ 分别化为标准的正频平面波解。在这些区域中，$u_{\boldsymbol{k}}^{(A)}$ 中所有绝热级高于零的项均为零，所以这些精确模的绝热级是无穷的。基于任何这样一组精确模的量子化得到的粒子数都是绝热不变的。

(2) 考虑在某个稍晚的时刻 η_0 的第 A 级绝热模 $u_{\boldsymbol{k}}^{(A)}$。在入射区，它们无法转化到标准形式，一般说来是后者的线性组合。因此由 $u_{\boldsymbol{k}}^{(A)}$ 定义的绝热近似真空将不同于由 $u_{\boldsymbol{k}}^{\text{in}}$ 定义的物理真空，所以一个惯性探测器会在此绝热近似真空中记录到一个“量子浴”。然而，由于场模已与 (A) 级绝热近似模相匹配，仅在 $(A+1)$ 级或更高级的项上有所不同，“量子浴” 中的高能粒子的数密度会按 $k^{-(A+1)}$(或 $m^{-(A+1)}$) 迅速下降。

对于时空没有入射和出射渐近闵可夫斯基区的情况，绝热真空以及由共动粒子探测器检测到的物理粒子的表示仍然是最好的。

为说明这一点，我们来看一个具体例子。

考虑一个渐近、非静态的 4 维宇宙模型 —— 时间对称反弹模型。$C^2(\eta)$ 如图 4.9 所示，即

$$C^2(\eta) = A^2 + B^2\eta^2 \quad (-\infty < \eta < +\infty)。 \tag{4.4.17}$$

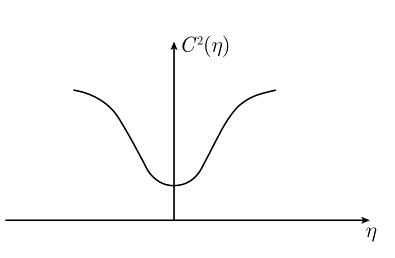


图 4.9　反弹宇宙模型的 $C^2(\eta)$ 曲线

当 $\eta \to \pm\infty$ 时，有

$$a(t) \equiv C(t) \propto t^{1/2} \quad (\text{辐射为主时期})。 \tag{4.4.18}$$

从 $C \sim \eta$，可得

$$\dot{C}/C = 1/\eta \to 0 \quad (\text{当 } \eta \to \pm\infty), \tag{4.4.19}$$

这意味着，当 $\eta \to \pm\infty$ 时，膨胀率趋于零。因此，所有级的绝热近似是相同的，只需要考虑零级绝热模，即

$$W_k^{(0)} = \omega_k(\eta) \quad \text{和} \quad \chi_k^{(0)}(\eta), \tag{4.4.20}$$

其中

$$\omega_k(\eta) = \left(k^2 + m^2A^2 + m^2B^2\eta^2\right)^{1/2} \to mB|\eta|。 \tag{4.4.21}$$

当 $\eta \to \pm\infty$ 时，有

$$\chi_k^{(0)}(\eta) \to (2mB|\eta|)^{-1/2} \exp\{\mp \mathrm{i} mB\eta^2/2\}。 \tag{4.4.22}$$

方程 (4.4.5) 具有韦伯 (Weber) 方程的形式，其通解是

$$\chi_k(\eta) = \begin{cases} C_1 D_{-\frac{1}{2}(1-\mathrm{i}\lambda)}[(2mB)^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}|\eta|] & (\eta < 0) \\ C_1 D_{-\frac{1}{2}(1-\mathrm{i}\lambda)}[(2mB)^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}|\eta|] & (\eta > 0) \end{cases}, \tag{4.4.23}$$

其中，$D_\nu(z)$ 是抛物线柱函数，$\lambda = \dfrac{k^2 + m^2A^2}{mB}$，另一个线性独立解在 $\eta \to \pm\infty$ 时发散。当 $\eta \to \pm\infty$ 时，有

$$\chi_k(\eta) \sim \begin{cases} \left[(2mB)^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}|\eta|\right]^{-\frac{1}{2}(1-i\lambda)} \exp(\mathrm{i}mB\eta^2/2) & (\eta < 0) \\ \left[(2mB)^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}|\eta|\right]^{-\frac{1}{2}(1-\mathrm{i}\lambda)} \exp(-\mathrm{i}mB\eta^2/2) & (\eta > 0) \end{cases}。 \tag{4.4.24}$$

显然适当选择常数，并略掉不重要复系数，则有

$$\begin{aligned} &\chi_k^{\mathrm{in}}(\eta) \overset{\eta\to-\infty}{\longrightarrow} \chi_k^{(0)}(-\infty), \\ &\chi_k^{\mathrm{out}}(\eta) \overset{\eta\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_k^{(0)}(+\infty)。 \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

如前所述，ϕ 既可由 $\eta_0 \to -\infty$ 处定义的零级绝热近似模 (不妨称为入射零级绝热近似模) 展开，也可由 $\eta_0 \to +\infty$ 处定义的零级绝热近似模 (出射零级绝热近似模) 展开，即

$$\phi = \begin{cases} \sum\limits_{\boldsymbol{k}} \left(a_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{in}} u_{\boldsymbol{k}}^{(0)\mathrm{in}} + a_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{in}\dagger} u_{\boldsymbol{k}}^{(0)\mathrm{in}*}\right), \\ \sum\limits_{\boldsymbol{k}} \left(a_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}} u_{\boldsymbol{k}}^{(0)\mathrm{out}} + a_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}\dagger} u_{\boldsymbol{k}}^{(0)\mathrm{out}*}\right)。 \end{cases} \tag{4.4.26}$$

用下式定义第零级绝热真空 $|0\rangle_{\mathrm{in}}^{(0)}$ 和 $|0\rangle_{\mathrm{out}}^{(0)}$：

$$\begin{aligned} &a_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{in}}|0\rangle_{\mathrm{in}}^{(0)} = 0, \qquad \forall \boldsymbol{k}, \\ &a_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{out}}|0\rangle_{\mathrm{out}}^{(0)} = 0, \qquad \forall \boldsymbol{k}。 \end{aligned} \tag{4.4.27}$$

利用《积分、级数、乘积表》[31] 中的公式 (9.248) 可以证明，$u_{\boldsymbol{k}}^{(0)\mathrm{in}}$ 和 $u_{\boldsymbol{k}}^{(0)\mathrm{out}}$ 之间的博戈留波夫变换为

$$u_{\boldsymbol{k}}^{(0)\mathrm{in}} = \frac{\mathrm{i}\,(2\pi)^{1/2}\,\mathrm{e}^{-\pi\lambda/4}}{\Gamma\left[\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i}\lambda)\right]} u_{\boldsymbol{k}}^{(0)\mathrm{out}} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi\lambda/2} u_{\boldsymbol{k}}^{(0)\mathrm{out}*}。 \tag{4.4.28}$$

所以

$$|\beta_k|^2 = \exp\left[-\pi\left(\frac{k^2}{mB} + \frac{mA^2}{B}\right)\right]。 \tag{4.4.29}$$

可见，探测器探测到高能粒子的概率确实被指数地压低了。

4.5 共 形 真 空

令

$$\bar{g}_{\mu\nu} = C^2 g_{\mu\nu} \tag{4.5.1}$$

或

$$\bar{g}^{\mu\nu} = C^{-2} g^{\mu\nu}。\tag{4.5.2}$$

在 n 维时空中，如果 $m=0$，

$$\xi = \frac{1}{4}\frac{n-2}{n-1}, \tag{4.3.6}$$

$$\bar{\phi} = C^{\frac{2-n}{2}} \phi, \tag{4.5.3}$$

则标量场方程

$$\left[\Box + m^2 + \xi R\right] \phi = 0 \tag{4.5.4}$$

是共形不变的。这时有

$$\bar{\phi} = \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\bar{a}_{\boldsymbol{k}} \bar{u}_{\boldsymbol{k}} + \bar{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} \bar{u}_{\boldsymbol{k}}^{*}\right) = C^{\frac{2-n}{2}} \phi = C^{\frac{2-n}{2}} \sum_{\boldsymbol{k}} \left(a_{\boldsymbol{k}} u_{\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} u_{\boldsymbol{k}}^{*}\right), \tag{4.5.5}$$

显然，在共形变换下，ϕ 的模函数与 ϕ 有相同的变换关系，即

$$\bar{u}_{\boldsymbol{k}} = C^{\frac{2-n}{2}} u_{\boldsymbol{k}}, \tag{4.5.6}$$

由此知 $\bar{a}_{\boldsymbol{k}} = a_{\boldsymbol{k}}$，所以用 $\bar{a}_{\boldsymbol{k}}$ 定义的真空与 $a_{\boldsymbol{k}}$ 定义的真空相同，也就是说，由

$$a_{\boldsymbol{k}} |0\rangle = 0, \qquad \forall \boldsymbol{k}, \tag{4.5.7}$$

定义的真空 $|0\rangle$ 是共形不变的，称为共形真空。

可以证明，在共形变换下，零质量标量场的费曼传播子满足①

$$\bar{D}_F(x, x') = C^{\frac{2-n}{2}}(x) D_F(x, x') C^{\frac{2-n}{2}}(x')。\tag{4.5.8}$$

这意味着，只要知道了闵可夫斯基时空或伦德勒时空的 D_F，就能容易地算出共形平直时空的 $\bar{D}_F$。

4.6 黑洞外的三种真空

在渐近平直的黑洞外有三种常用的真空，它们是布维尔 (Boulware) 真空 $|0\rangle_{\mathrm{B}}$，也记作 $|0\rangle_{\mathrm{S}}$[32, 33]、哈特 (Hartle)–霍金真空 $|0\rangle_{\mathrm{H}}$[34] 和安鲁真空 $|0\rangle_{\mathrm{U}}$[35]。下面以施瓦西黑洞为例，介绍这三种真空。

① 一般来说，格林函数用 G 表示，在零质量极限下，通常采用 D 来表示。

(1) 布维尔真空 $|0\rangle_{\mathrm{B}}=|0\rangle_{\mathrm{S}}$。用施瓦西坐标 (t,r) 定义双类光坐标 (u,v)，其中 $u=t-r_*$，$v=t+r_*$。类时基灵矢量场为

$$\boldsymbol{\xi}_{(t)}=\frac{\partial}{\partial t}, \tag{4.6.1}$$

在渐近平直区，有正频模函数 $u_{\boldsymbol{k}}$，特别地，

$$在\ \mathcal{J}^+附近, \qquad u_{\boldsymbol{k}}\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u}, \tag{4.6.2}$$

$$在\ \mathcal{J}^-附近, \qquad u_{\boldsymbol{k}}\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v}, \tag{4.6.3}$$

相应的福克表象的量子态为 $|n\rangle_{\mathrm{B}}(n\geqslant 0$ 的整数)。布维尔真空 $|0\rangle_{\mathrm{B}}$ 相应于星体外部远方我们熟悉的空虚态的概念，但由于施瓦西坐标在黑洞的视界上是奇异的，故在施瓦西黑洞附近，它不给出好的定义。

(2) 哈特–霍金真空 $|0\rangle_{\mathrm{H}}$。用克鲁斯卡尔坐标 $(\mathcal{T},\mathcal{R})$ 定义新的双类光坐标 $(\bar{u},\bar{v})$，其中 $\bar{u}=\mathcal{T}-\mathcal{R}$，$\bar{v}=\mathcal{T}+\mathcal{R}$。在渐近平直区，得正频模函数

$$在\ \mathcal{J}^+\ 附近, \qquad u\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\bar{u}}, \tag{4.6.4}$$

$$在\ \mathcal{J}^-\ 附近, \qquad u\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\bar{v}}, \tag{4.6.5}$$

相应的福克表象中的量子态为 $|n\rangle_{\mathrm{H}}(n\geqslant 0)$。这套坐标在整个流形上都有好的定义，由它所定义的真空态即使是在黑洞视界附近也是有意义的。后面将看到，哈特–霍金真空 $|0\rangle_{\mathrm{H}}$ 相应于黑洞与黑体辐射海处于热平衡的态。

(3) 安鲁真空 $|0\rangle_{\mathrm{U}}$。来自 $\mathcal{J}^-$ 的入射真空用 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 或 $\dfrac{\partial}{\partial v}$ 来定义，即

$$在\ \mathcal{J}^-\ 附近, \qquad u\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v}, \tag{4.6.6}$$

前往 $\mathcal{J}^+$ 的出射真空用 $\dfrac{\partial}{\partial \mathcal{T}}$ 或 $\dfrac{\partial}{\partial \bar{u}}$ 来定义，即

$$在\ \mathcal{J}^+\ 附近, \qquad u\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\bar{u}}。 \tag{4.6.7}$$

于是，出射态在黑洞视界面上有好的定义。我们将看到，在安鲁真空 $|0\rangle_{\mathrm{U}}$ 中，观察者可观察到飞向远方的黑体辐射流，所以安鲁真空可能是描写大质量星体引力坍缩成黑洞所得到的最佳近似态。

4.7 粒子和粒子探测器

为了判定粒子是否是物理实体，必须依靠所谓的粒子探测器。什么是粒子探测器呢？安鲁和德维特 (DeWitt) 给出一个最简单的粒子探测器构造方案：

一个具有内能 E_n 的理想点粒子，通过单极相互作用与标量场 ϕ 耦合，那么标量场与探测器的相互作用拉格朗日 (Lagrange) 量是

$$\lambda m(\tau)\,\phi(x(\tau))\,, \tag{4.7.1}$$

其中，τ 是探测器的固有时，$m(\tau)$ 是探测器在时刻 τ 的单极子算子，$x(\tau)$ 是粒子探测器运动的世界线，$\phi(x(\tau))$ 是运动探测器“触摸”到的场，λ 是一个小的耦合常数。

假定场 ϕ 初始处于真空态 $|0\rangle$，探测器处于自己的基态 $|E_0\rangle$，对于充分小的 λ，在一级微扰下从 $|0,E_0\rangle$ 到 $|\psi,E_n\rangle$ 态的跃迁振幅是

$$\mathrm{i}\lambda\langle E_n,\psi|\int_{-\infty}^{+\infty} m(\tau)\,\phi(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau|0,E_0\rangle, \tag{4.7.2}$$

式 (4.7.2) 可由

$$S'=(-\mathrm{i})\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{H}_i\mathrm{d}\tau \tag{4.7.3}$$

和

$$\mathcal{H}_i(\tau)=-\mathcal{L}_i=-\lambda m(\tau)\,\phi(x(\tau))$$

推出。

在相互作用表象中，有

$$m(\tau)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0\tau}m(0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0\tau}, \tag{4.7.4}$$

其中

$$H_0|E_n\rangle=E_n|E_n\rangle, \tag{4.7.5}$$

因此跃迁振幅是

$$A(E_n,\psi)=\mathrm{i}\lambda\langle E_n|m(0)\,|E_0\rangle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_n-E_0)\tau}\langle\psi|\phi(\tau)\,|0\rangle\mathrm{d}\tau。 \tag{4.7.6}$$

跃迁到所有可能的 E_n 和 ψ 的概率是

$$\begin{aligned}
&\sum_{n,\psi}A^*(E_n,\psi)\,A(E_n,\psi)\\
=&\lambda^2\sum_n|\langle E_n|m(0)\,|E_0\rangle|^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_n-E_0)\tau+\mathrm{i}(E_n-E_0)\tau'}\\
&\sum_\psi\langle 0|\phi^*(\tau)\,|\psi\rangle\langle\psi|\phi(\tau')\,|0\rangle\\
=&\lambda^2\sum_n|\langle E_n|m(0)\,|E_0\rangle|^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_n-E_0)(\tau-\tau')}\\
&\langle 0|\phi^*(\tau)\,\phi(\tau')\,|0\rangle\\
=&\lambda^2\sum_n|\langle E_n|m(0)\,|E_0\rangle|^2\mathcal{F}(E_n-E_0)\,,
\end{aligned} \tag{4.7.7}$$

其中

$$\mathcal{F}(E_n - E_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_n - E_0)(\tau-\tau')} G^+(x(\tau), x(\tau')) \tag{4.7.8}$$

被称为探测器的响应函数，$G^+(x(\tau), x(\tau'))$ 是正频怀特曼 (Wightman)-格林函数 (或称正频怀特曼函数)。可见，跃迁几率既依赖于探测器的运动，又依赖于探测器的内部结构。

一般说来，怀特曼函数只是 $\Delta\tau = \tau - \tau'$ 的函数。现在，做变量替换 $(\tau, \tau') \to (\tau, \Delta\tau)$，即令 $\tau' = \tau - \Delta\tau$，由于

$$J = \frac{\partial(\tau, \tau')}{\partial(\tau, \Delta\tau)} = -1,$$

$$\mathcal{F}(E_n - E_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}(\Delta\tau)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_n - E_0)\Delta\tau} G^+(\Delta\tau), \tag{4.7.9}$$

则单位固有时的响应函数 $f(E)$ 是

$$f(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}(\Delta\tau)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E\Delta\tau} G^+(\Delta\tau) 。 \tag{4.7.10}$$

在闵可夫斯基流形上，对无质量标量粒子有

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}G^+(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta t) &= \mathrm{i}D^+(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta t) \\
&= (2\pi)^{-4} \int_{C^+} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{x} - \mathrm{i}k_0\cdot\Delta t}}{k_0^2 - |\boldsymbol{k}|^2} \mathrm{d}k_0 \mathrm{d}\boldsymbol{k} \qquad \text{(用笛卡儿坐标)} \\
&= (2\pi)^{-3}\mathrm{i} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \omega^2 \mathrm{d}\omega \mathrm{d}(\cos\theta) \mathrm{d}\varphi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega|\Delta\boldsymbol{x}|\cos\theta - \mathrm{i}\omega\Delta t}}{2\omega} \\
&= (2\pi)^{-2} \frac{1}{|\Delta\boldsymbol{x}|} \int_0^{\infty} \mathrm{i}\mathrm{d}\omega \sin(\omega|\Delta\boldsymbol{x}|) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\Delta t} \\
&= (2\pi)^{-2} \frac{\mathrm{i}}{(\Delta\boldsymbol{x})^2 - (\Delta t)^2},
\end{aligned} \tag{4.7.11}$$

其中，在复 k_0 平面上的积分回路 C^+ 由图 4.10 给出。

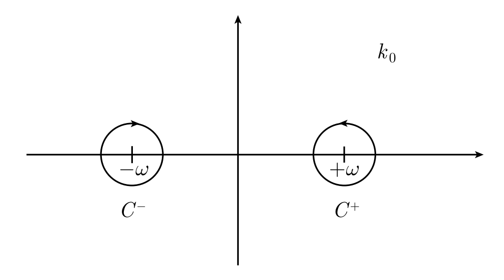


图 4.10 $\mathrm{i}G^+$ 在复 k_0 平面上的积分回路 C^+

下面讨论几个具体的例子。

1. 固定于惯性系中的探测器

在这种情况，方程 (4.7.11) 化成

$$G^{+}\left(\Delta\tau\right)=-\frac{1}{(2\pi)^{2}\left(\Delta\tau\right)^{2}},\tag{4.7.12}$$

方程 (4.7.10) 表示为

$$f\left(E\right)=-\lim_{\epsilon\to0^{+}}\left(2\pi\right)^{-2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\left(\Delta\tau\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E\Delta\tau}\frac{1}{\left(\Delta\tau-\mathrm{i}\epsilon\right)^{2}}。\tag{4.7.13}$$

对于 $E>0$ 的情况，可以变形积分曲线，把沿实 $\Delta\tau$ 轴的积分改变到沿下半复平面 $\Delta\tau$ 的大半圆周上 (注意，$\Delta\tau$ 的极点位于上半复 $\Delta\tau$ 平面上)，所以结果是

$$f(E)=0,\tag{4.7.14}$$

即闵可夫斯基流形上的惯性探测器检测不到粒子。

2. 固定于伦德勒系中的探测器

考虑从闵可夫斯基坐标系 (t,x) 到伦德勒系 (η,ξ) 的变换由式 (4.2.1) 给出。设固定于伦德勒系中的探测器的固有时是 τ，则由式 (4.2.2) 知，$\tau=\mathrm{e}^{a\xi}\eta$。于是，我们有

$$\begin{cases} t=\alpha\sinh(\tau/\alpha),\\ x=\alpha\cosh(\tau/\alpha),\end{cases}\tag{4.7.15}$$

其中，$\alpha^{-1}=a\mathrm{e}^{-a\xi}$ 是探测器的固有加速度。把式 (4.7.15) 代入式 (4.7.11)，并注意到 $\xi=\xi'$，有

$$\begin{aligned}
D^{+}=&\frac{1}{(2\pi)^{2}}\left\{\alpha^{2}\left[\cosh(\tau/\alpha)-\cosh(\tau'/\alpha)\right]^{2}-\left[\sinh(\tau/\alpha)-\sinh(\tau'/\alpha)\right]^{2}\right\}^{-1}\\
=&\frac{1}{(2\pi)^{2}}\frac{1}{4\alpha^{2}}\left[\sinh^{2}\left(\frac{\tau+\tau'}{2\alpha}\right)\sinh^{2}\left(\frac{\Delta\tau}{2\alpha}\right)-\cosh^{2}\left(\frac{\tau+\tau'}{2\alpha}\right)\sinh^{2}\left(\frac{\Delta\tau}{2\alpha}\right)\right]^{-1}\\
=&-\left[16\pi^{2}\alpha^{2}\sinh^{2}\left(\frac{\Delta\tau}{2\alpha}\right)\right]^{-1}\\
=&-\frac{1}{16\pi^{2}\alpha^{2}}\left[-\mathrm{i}\sin\left(\mathrm{i}\frac{\Delta\tau}{2\alpha}\right)\right]^{-2}\\
=&\frac{1}{16\pi^{2}\alpha^{2}}\csc^{2}\left[\pi\left(\mathrm{i}\frac{\Delta\tau}{2\pi\alpha}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{16\pi^4\alpha^2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left[\mathrm{i}\left(\frac{\Delta\tau}{2\pi\alpha}\right)-k\right]^{-2}\\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\frac{1}{\left[\Delta\tau+2\pi\mathrm{i}\alpha k\right]^2},
\end{aligned}
\tag{4.7.16}
$$

其中，倒数第二个等号用了恒等式

$$
\csc^2\pi x = \pi^{-2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(x-k)^{-2}。\tag{4.7.17}
$$

单位固有时响应函数

$$
f(E) = -\frac{1}{4\pi^2}\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}(\Delta\tau)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E\Delta\tau}}{(\Delta\tau-\mathrm{i}\epsilon+2\pi\mathrm{i}\alpha k)^2} \tag{4.7.18}
$$

中沿实 $\Delta\tau$ 轴的积分可以用沿下半复平面 $\Delta\tau$ 的大半圆周的积分代替，所有伴随 $k\leqslant 0$ 的极点对积分没有贡献，因此积分可以用下面的留数定理积出，即

$$
2\pi\mathrm{i}b_1 = \frac{2}{3[q''(z_0)]^2}\left[3p'(z_0)q''(z_0)-p(z_0)q'''(z_0)\right] \tag{4.7.19}
$$

式 (4.7.19) 相应于二阶极点的留数，其中 $z=z_0$ 是函数 $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ 的二阶极点。结果是

$$
f(E) = \frac{E}{2\pi}\sum_{k=1}^{k=+\infty}\left(\mathrm{e}^{-2\pi E\alpha}\right)^k = \frac{E}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{e}^{2\pi E\alpha}-1}, \tag{4.7.20}
$$

级数的收敛域为 $\mathrm{e}^{-2\pi E\alpha}<1$。

跃迁到所有可能的 E_n 的概率是

$$
\frac{\lambda^2}{2\pi}\sum_{E_n}\frac{(E_n-E_0)\left|\langle E_n|m(0)|E_0\rangle\right|^2}{\mathrm{e}^{2\pi(E_n-E_0)\alpha}-1}。\tag{4.7.21}
$$

普朗克因子 $\left[\mathrm{e}^{2\pi(E_n-E_0)\alpha}-1\right]^{-1}$ 的出现显示，加速探测器和真空态 $|0\rangle_M$ 中的 ϕ 场的平衡，与一个未加速的探测器浸在温度为

$$
T = \frac{1}{2\pi\alpha k_{\mathrm{B}}} = \frac{\alpha^{-1}}{2\pi k_{\mathrm{B}}} \tag{4.7.22}
$$

的热辐射“浴”中取得的平衡相同。此结论与用博戈留波夫变换法得到的结果一致。

应该指出，要得到 1K 的温度，探测器的固有加速度必须达到 $10^{20}\mathrm{ms}^{-2}$。如果考虑阿达玛 (Hadamard) 基本函数

$$D^{(1)} = \langle 0|\{\phi(x), \phi(x')\}|0\rangle = D^+(x,x') + D^-(x,x'), \tag{4.7.23}$$

对于伦德勒探测器将有

$$D^{(1)}(\Delta\tau) = D_\beta^{(1)}(\Delta\tau) = -(2\pi^2)^{-1}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\big(\Delta\tau + \mathrm{i}k\beta\big)^{-2}, \tag{4.7.24}$$

即匀加速探测器的真空格林函数与一个惯性探测器的温度格林函数相同。

3. 固定于圆周运动系中的探测器

我们已看到此系中的混频系数为零，因此转动真空与闵可夫斯基真空相同，这表明转动探测器不会在闵可夫斯基真空中探测到任何东西。令人吃惊的是，立陶 (Letaw) 与法池 (Pfautsch) 指出，以恒定角速度转动的探测器会测到非热谱[21]

$$\frac{\tau^4 v^2 \epsilon_\tau^2}{32\pi^3\gamma}\int_0^\infty \cos(\gamma\epsilon_\tau x)\left[\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2(x^2 - v^2\sin^2 x)}\right]\mathrm{d}x, \tag{4.7.25}$$

其中

$$\gamma \equiv (1-v^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad v \equiv \Omega\cdot R < 1, \quad \tau = \Omega\gamma^2, \quad \epsilon_\tau = \frac{2E}{\tau}, \tag{4.7.26}$$

其中，τ 是探测器世界线的挠率或探测器的角速度。

1981 年，立陶和法池进一步考虑了闵可夫斯基流形上的六类稳态坐标系中的自由标量场的量子场论[37]，发现只存在两种可能的真空，即不存在事件视界的坐标系对应的真空是闵可夫斯基真空，存在事件视界的坐标系对应的真空是福林 (Fulling) 真空 (伦德勒真空)。因此，一个尚待解决的问题是，为什么用博戈留波夫变换得出的结果与用转动情况的探测器理论得出的结果不一致？

第 5 章　量子物质场的有效作用量

为了以后计算方便，需要注意平直时空量子场论和弯曲时空量子场论的差别(表 5.1)。

表 5.1　平直空间场论与弯曲空间场论的差别

	n 维平直时空	n 维弯曲时空
测度	$\mathrm{d}^n x$	$\sqrt{-g}\mathrm{d}^n x$
δ 函数	$\delta^n(x,y)=\delta^n(x-y)$	$\delta^n(x,y)=\dfrac{\delta^n(x-y)}{\sqrt{-g(y)}}$
(分布)	$\int \mathrm{d}^n x\delta^n(x-y)=1$	$\int \sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^n x\delta^n(x,y)=1$
$G_F(x,y)$	$(\Box_x+m^2)G_F(x,y)=-\delta^n(x-y)$	$(\Box_x+m^2+\xi R(x))G_F(x,y)=-\delta^n(x,y)$
	$G_F(x,y)=\langle x\vert\hat{G}_F\vert y\rangle$	$G_F(x,y)=\langle x\vert\hat{G}_F\vert y\rangle$

5.1　量子物质场的有效作用量

众所周知，经典爱因斯坦方程

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\Lambda g_{\mu\nu}=-8\pi GT_{\mu\nu} \tag{5.1.1}$$

可以用变分原理

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}=0 \tag{5.1.2}$$

从经典作用量

$$\begin{aligned}S=S_g+S_m&=\int\mathscr{L}_g\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x+\int\mathscr{L}_m\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\\&=\frac{1}{16\pi G}\int\sqrt{-g}(R-2\Lambda)\mathrm{d}^4x+\int\mathscr{L}_m\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

得出，其中

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_g}{\delta g^{\mu\nu}}=\frac{1}{8\pi G}(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\Lambda g_{\mu\nu}), \tag{5.1.4}$$

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}=T_{\mu\nu}。 \tag{5.1.5}$$

在半经典理论中，爱因斯坦方程取如下形式，即

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G\langle T_{\mu\nu}\rangle。 \tag{5.1.6}$$

我们希望对量子物质场引进有效作用量 Γ，以得出 $\langle T_{\mu\nu}\rangle$，即

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\Gamma}{\delta g^{\mu\nu}} = \langle T_{\mu\nu}\rangle。 \tag{5.1.7}$$

现在我们来证明有效作用量 Γ 可以用真空保持幅或无外源的生成泛函来决定。为后面讨论的方便，我们不限于 4 维的情况，假定时空维数为 n。

证明：有外源和无外源的生成泛函分别是

$$\begin{aligned} Z(J) =& {}_{\text{out}}\langle 0|0\rangle_{\text{in}}^{J} \\ =& \mathcal{N}\int \mathscr{D}[\phi]\exp\left[\mathrm{i}S_m(\phi) + \mathrm{i}\int J(x)\phi(x)\sqrt{-g}\mathrm{d}^n x\right], \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

$$Z(0) = {}_{\text{out}}\langle 0|0\rangle_{\text{in}} = \mathcal{N}\int \mathscr{D}[\phi]\exp(\mathrm{i}S_m), \tag{5.1.9}$$

其中，$\mathscr{D}[\phi]$ 是对物质场 ϕ 求泛函积分，$\mathcal{N}$ 是归一常数，具有 $\{\mathscr{D}[\phi]\}^{-1}$ 的量纲。式 (5.1.8) 和式 (5.1.9) 分别为有外源和无外源时的真空保持幅。注意：在平直时空中，当 $J=0$ 时，$Z(0) = {}_{\text{out}}\langle 0|0\rangle_{\text{in}} = \langle 0|0\rangle = 1$，这意味着真空是稳定的；而在弯曲时空中，即使 $J=0$，也可能有 $Z(0)\neq 1$，这意味着真空是不稳定的。

有效作用量 Γ 可用真空保持幅定义为

$$\Gamma = \frac{1}{\mathrm{i}}\ln Z(0) = \frac{1}{\mathrm{i}}\ln {}_{\text{out}}\langle 0|0\rangle_{\text{in}}, \tag{5.1.10}$$

或

$$Z(0) = {}_{\text{out}}\langle 0|0\rangle_{\text{in}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Gamma}。 \tag{5.1.11}$$

于是有

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta Z(0)}{\delta g^{\mu\nu}} =& \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\mathcal{N}\int \mathscr{D}[\phi]\exp(\mathrm{i}S_m) = \mathrm{i}\mathcal{N}\int \mathscr{D}[\phi]\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_m} \\ =& \mathrm{i}_{\text{out}}\langle 0|\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta \hat{S}_m}{\delta g^{\mu\nu}}|0\rangle_{\text{in}} = \mathrm{i}_{\text{out}}\langle 0|\hat{T}_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{in}}。 \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

另一方面，

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta Z(0)}{\delta g^{\mu\nu}} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Gamma}\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\Gamma}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{5.1.13}$$

所以

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\Gamma}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{{}_{\text{out}}\langle 0|\hat{T}_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{in}}}{{}_{\text{out}}\langle 0|0\rangle_{\text{in}}}。 \tag{5.1.14}$$

$\varGamma$ 正是我们要找的量子物质场的有效作用量。

实际上，我们常需用到入射态和出射态的真空期待值，它们与式 (5.1.14) 有如下关系[1]，即

$$_{\rm in}\langle 0|\hat{T}_{\mu\nu}|0\rangle_{\rm in} = \frac{_{\rm out}\langle 0|\hat{T}_{\mu\nu}|0\rangle_{\rm in}}{_{\rm out}\langle 0|0\rangle_{\rm in}} - {\rm i}\sum_{j,k}\varLambda_{jk}T_{\mu\nu}(u_j^{{\rm in}*}, u_k^{{\rm in}*}), \tag{5.1.15}$$

$$_{\rm out}\langle 0|\hat{T}_{\mu\nu}|0\rangle_{\rm out} = \frac{_{\rm out}\langle 0|\hat{T}_{\mu\nu}|0\rangle_{\rm in}}{_{\rm out}\langle 0|0\rangle_{\rm in}} - {\rm i}\sum_{i,j}V_{ij}T_{\mu\nu}(u_i^{{\rm out}*}, u_j^{{\rm out}*}), \tag{5.1.16}$$

其中

$$\varLambda_{jk} \equiv -{\rm i}\sum_l \beta_{lk}\alpha_{jl}^{-1}, \qquad V_{jk} = {\rm i}\sum_l \beta_{kl}^*\beta_{lj}^{-1}。 \tag{5.1.17}$$

这种关系之所以成立，是由于入射态与出射态主要区别在于定义它们的边界条件不同，而物理量的紫外行为 (或时空的小尺度性质) 与边界条件无关。

此外，我们要指出：

(1) 从 ${\rm e}^{{\rm i}\varGamma} = {}_{\rm out}\langle 0|0\rangle_{\rm in}$ 可得

$$|_{\rm out}\langle 0|0\rangle_{\rm in}|^2 = {\rm e}^{{\rm i}\varGamma}{\rm e}^{-{\rm i}\varGamma^*} = {\rm e}^{-2{\rm Im}\varGamma}, \tag{5.1.18}$$

所以，有效作用量的虚部不为零意味着粒子从真空中产生。

(2)

$$\varGamma = -\frac{1}{2}{\rm i}{\rm Tr}\ln(-\mu^2 G_F), \tag{5.1.19}$$

其中，μ 是一个量纲为 M 的常数。更一般地，

$$\varGamma = -\frac{1}{2}{\rm i}\sum_f \epsilon_f {\rm Tr}\ln\big[-\mu_f^2 G_F^f(x,x')\big], \tag{5.1.20}$$

其中，$\sum\limits_f$ 表示对那些对单圈 $\varGamma$ 有贡献的场求和，

$$\epsilon_f = \begin{cases} +1 & (\text{玻色子}) \\ -1 & (\text{费米子}) \end{cases}。$$

式 (5.1.19) 或式 (5.1.20) 告诉我们，一旦知道 $G_{\rm F}$，就能计算 $\varGamma$，于是就知道了一切。

下面仅对标量场证明式 (5.1.19)。由式 (5.1.8) 知，有外源时标量场的生成泛函是

$$Z(J) = {}_{\rm out}\langle 0|0\rangle_{\rm in}^J = \mathcal{N}\int \mathscr{D}[\phi]\exp\left\{{\rm i}S(\phi) + {\rm i}\int\sqrt{-g(x)}{\rm d}^n x J(x)\phi(x)\right\},$$

其中

$$S=\int \mathscr{L}\sqrt{-g}\mathrm{d}^n x, \tag{5.1.21}$$

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(g^{\alpha\beta}\phi_{;\alpha}\phi_{;\beta}-m^2\phi^2)。 \tag{5.1.22}$$

用分部积分法，略去边界项，作用量可被改写为

$$S=\int \mathrm{d}^n x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}\phi(\Box+m^2)\phi\right]。 \tag{5.1.23}$$

将恒等式

$$\int \mathrm{d}^n x\sqrt{-g(x)}\delta^n(x,y)=1 \tag{5.1.24}$$

插入作用量得

$$S=-\frac{1}{2}\int \sqrt{-g(x)}\sqrt{-g(y)}\mathrm{d}^n x\mathrm{d}^n y\phi(x)K(x,y)\phi(y), \tag{5.1.25}$$

其中

$$\delta^n(x,y)=\frac{\delta^n(x-y)}{\sqrt{-g(y)}},$$

$$K(x,y)=(\Box_x+m^2)\frac{\delta^n(x-y)}{\sqrt{-g(x)}}。 \tag{5.1.26}$$

另一方面，费曼格林函数 (又称为费曼传播子) 的定义是

$$(\Box_x+m^2)G_F(x,y)=-\delta^n(x,y)=-\frac{\delta^n(x-y)}{\sqrt{-g(x)}}, \tag{5.1.27}$$

将式 (5.1.24) 插入式 (5.1.27) 的左边得

$$\int \sqrt{-g(z)}\mathrm{d}^n zK(x,z)G_F(z,y)=-\delta^n(x,y), \tag{5.1.28}$$

把 $K(x,z)$ 和 $G_F(z,y)$ 分别看成具有两个连续指标的矩阵，式 (5.1.28) 左边就是两个矩阵的乘积，右边则是具有两个连续指标的“单位”矩阵的负值，所以

$$K^{-1}(x,y)=-G_F(x,y)。 \tag{5.1.29}$$

在泛函积分中考虑变量替换

$$\phi'(x)\equiv\int \sqrt{-g(y)}\mathrm{d}^n yK^{1/2}(x,y)\phi(y), \tag{5.1.30}$$

注意到

$$\int \sqrt{-g(y)}\mathrm{d}^n y K^{\pm\frac{1}{2}}(x,y)K^{\pm\frac{1}{2}}(y,z) = K^{\pm 1}(x,z), \tag{5.1.31}$$

$$\int \sqrt{-g(y)}\mathrm{d}^n y K^{\frac{1}{2}}(x,y)K^{-\frac{1}{2}}(y,z) = \delta^n(x,z), \tag{5.1.32}$$

则由式 (5.1.30) 可解出 ϕ

$$\phi(x) = \int \sqrt{-g(y)}\mathrm{d}^n y K^{-1/2}(x,y)\phi'(y), \tag{5.1.33}$$

于是，生成泛函的指数部分可重写为

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\int \sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^n x\left[\phi'(x) - \int \sqrt{-g(y)}\mathrm{d}^n y J(y) K^{-1/2}(y,x)\right]^2\\&-\frac{1}{2}\int \sqrt{-g(x)}\sqrt{-g(y)}\mathrm{d}^n x\mathrm{d}^n y J(x) G_F(x,y) J(y)。\end{aligned} \tag{5.1.34}$$

由于

$$\mathscr{D}[\phi] = \det\left(\frac{\delta\phi}{\delta\phi'}\right)\mathscr{D}[\phi'] = \det(K^{-1/2})\mathscr{D}[\phi'], \tag{5.1.35}$$

所以有

$$\begin{aligned}Z(J) = \mathcal{N}\int \mathscr{D}[\phi']\det(K^{-1/2})\exp\Bigg\{&-\frac{\mathrm{i}}{2}\int \sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^n x\\&\times\left[\phi'(x) - \int \sqrt{-g(y)}\mathrm{d}^n y J(y) K^{-\frac{1}{2}}(y,x)\right]^2\\&-\frac{\mathrm{i}}{2}\int \sqrt{-g(x)}\sqrt{-g(y)}\mathrm{d}^n x\mathrm{d}^n y J(x) G_F(x,y) J(y)\Bigg\},\end{aligned} \tag{5.1.36}$$

在上述泛函积分中 $K^{-1/2}$ 因子和指数的第二项都不依赖于 ϕ'，所以可以从积分号中取出，余下的泛函积分实际上是一个对 ϕ' 的高斯型积分，结果是数字。因此有

$$\begin{aligned}Z(J) \propto &\det(K^{-1/2})\\&\times\exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{i}\int \sqrt{-g(x)}\sqrt{-g(y)}\mathrm{d}^n x\mathrm{d}^n y J(x) G_F(x,y) J(y)\right],\end{aligned} \tag{5.1.37}$$

$$\begin{aligned}\exp[\mathrm{i}\varGamma] = Z(0) &\propto \det(K^{-1/2}) = \det(-G_F^{1/2}) = [\det(-G_F)]^{1/2}\\&= \exp\left\{\frac{1}{2}\ln[\det(-G_F)]\right\} = \exp\left[\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln(-G_F)\right]。\end{aligned} \tag{5.1.38}$$

由此立即得到式 (5.1.19)。在式 (5.1.38) 的推导中用到如下两个条件。

(1)
$$G_F(x,y) = \langle x|\hat{G}_F|y\rangle, \tag{5.1.39}$$

其中，$|x\rangle$ 满足如下归一化条件

$$\langle x|y\rangle = \delta^n(x,y); \tag{5.1.40}$$

(2) 选取适当么正变换总可以把 $\hat{G}_F$ 对角化，对角化后，上式最后一行第一个等号就是显而易见的了。

为看清本节所讨论的各物理量的量纲，我们将它们集中列于表 5.2 中。

表 5.2　在 $c=\hbar=1$ 单位制下的量纲分析 ($L^\alpha = M^{-\alpha}$)

物理量	量纲	物理量	量纲	物理量	量纲
S	0	$\mathrm{d}^n x$	L^n	$\phi(x)(=\phi\|x\rangle)$	$L^{1-n/2}$
$\delta^n(x,y)$	L^{-n}	$J(x)$	$L^{-1-n/2}$	ϕ	L^1
$\|x\rangle$	$L^{-n/2}$	$\|0\rangle_{\text{in}}$	0	$\|0\rangle_{\text{out}}$	0
Γ	0	$Z[J]$	0	$Z[0]$	0
K	L^{-2}	K^{-1}	L^2	$K^{1/2}$	L^{-1}
$K^{-1/2}$	L^1	$K(x,y)$	L^{-2-n}	$K^{-1}(x,y)$	L^{2-n}
$K^{1/2}(x,y)$	L^{-1-n}	$K^{-1/2}(x,y)$	L^{1-n}	$\phi'(x)$	$L^{-n/2}$
G_F	L^2	$G_F(x,y)$ $(=\langle x\|G_F\|y\rangle)$	L^{2-n}	μ	L^{-1}
$\dfrac{\delta\phi(x)}{\delta\phi'(y)}$	L^{1-n}	$\mathcal{N}$	$[\{\mathscr{D}[\phi]\}^{-1}]$	$\det(K^{-1/2})$ $\mathscr{D}[\phi']$	$[\mathscr{D}[\phi]]$

5.2 费曼传播子的德维特–施温格固有时展开

在涉及紫外发散等问题的处理时，场的高频行为变得尤为重要。由于高频 (短波长) 部分所能探测到的是时空的短程性质，我们需要考察费曼传播子 G_F 在小尺度上的行为，即 $x\to x'$ 的行为。另一方面，我们希望知道在弯曲时空中物质场的圈图修正效应，这就要计算圈图费曼传播子。对于圈图传播子也可从 $G_F(x,x')|_{x\to x'}$ 中得到。这一节，我们就来讨论 G_F 在 $x\to x'$ 时的德维特–施温格 (D-S) 固有时展开，或简称为德维特–施温格展开、D-S 展开。

在一点 x' 的邻域引进黎曼法坐标 y^α(在 x' 点，$y=0$)，则位于该点 x' 邻域的 $g_{\mu\nu}(y)$ 可以展开为

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu}(y)=&\eta_{\mu\nu}+\frac{1}{3}R_{\mu\alpha\nu\beta}y^\alpha y^\beta+\frac{1}{6}R_{\mu\alpha\nu\beta;\gamma}y^\alpha y^\beta y^\gamma\\&+\left(\frac{1}{20}R_{\mu\alpha\nu\beta;\gamma\delta}+\frac{2}{45}R_{\alpha\mu\beta\lambda}R^\lambda{}_{\gamma\nu\delta}\right)y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta+\cdots,\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

这里所有的系数都在 $y^\mu=0$ 点 (在 x' 点) 取值，在进一步计算中都作为常数处理，$\eta_{\mu\nu}$ 是闵可夫斯基度规，指标用 $\eta_{\mu\nu}$ 及其逆升降。逆度规及度规的行列式

分别为①

$$
\begin{aligned}
g^{\mu\nu} = & \eta^{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^{\mu\ \ \nu}_{\ \alpha\ \beta}y^\alpha y^\beta - \frac{1}{6}R^{\mu\ \ \nu}_{\ \alpha\ \beta;\gamma}y^\alpha y^\beta y^\gamma \\
& - \left(\frac{1}{20}R^{\mu\ \ \nu}_{\ \alpha\ \beta;\gamma\delta} - \frac{1}{15}R_{\alpha\ \beta\lambda}^{\ \mu}R^{\lambda\ \ \nu}_{\ \gamma\ \delta}\right)y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta + \cdots ,
\end{aligned} \tag{5.2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
g = & -1 - \frac{1}{3}R_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta - \frac{1}{6}R_{\alpha\beta;\gamma}y^\alpha y^\beta y^\gamma - \left(\frac{1}{18}R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}\right. \\
& \left. - \frac{1}{90}R_{\lambda\alpha\beta}^{\ \ \ \ \kappa}R^\lambda_{\ \gamma\delta\kappa} + \frac{1}{20}R_{\alpha\beta;\gamma\delta}\right)y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta + \cdots。
\end{aligned} \tag{5.2.3}
$$

用

$$
\begin{aligned}
G_F(y,0) & = [-g(y)]^{-1/4}\mathscr{G}_F(y,0)[-g(0)]^{-1/4} \\
& = [-g(y)]^{-1/4}\mathscr{G}_F(y,0)
\end{aligned} \tag{5.2.4}
$$

来定义 $\mathscr{G}_F(y,0)$。现在用黎曼法坐标展开费曼格林函数满足的方程，即

$$
[\Box_y + m^2 + \xi R(y)]G_F(y,0) = -[-g(y)]^{-1/2}\delta^n(y) \tag{5.2.5}
$$

或

$$
\begin{aligned}
& \left\{\frac{1}{\sqrt{-g(y)}}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\left[\sqrt{-g(y)}g^{\mu\nu}(y)\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right] + m^2 + \xi R(y)\right\}G_F(y,0) \\
= & -[-g(y)]^{-1/2}\delta^n(y),
\end{aligned} \tag{5.2.6}
$$

将式 (5.2.4) 代入，并利用式 (5.2.1)~ 式 (5.2.3) 及

$$
R(y) = R(0) + R_{;\alpha}(0)y^\alpha + \frac{1}{2}R_{;\alpha\beta}(0)y^\alpha y^\beta \tag{5.2.7}
$$

可得

$$
\begin{aligned}
& \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\mathscr{G}_F + \left[m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6}\right)R\right]\mathscr{G}_F + \left[\frac{1}{3}R^\nu_\alpha\partial_\nu\mathscr{G}_F + \left(\xi - \frac{1}{6}\right)R_{;\alpha}\mathscr{G}_F\right]y^\alpha \\
& - \left[\frac{1}{3}R^{\mu\ \ \nu}_{\ \alpha\ \beta}\partial_\mu\partial_\nu\mathscr{G}_F - \left(\frac{1}{3}R^\nu_{\ \alpha;\beta} - \frac{1}{6}R_{\alpha\beta}^{\ \ \ ;\nu}\right)\partial_\nu\mathscr{G}_F - \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{6}\right)R_{;\alpha\beta}\mathscr{G}_F\right]y^\alpha y^\beta \\
& + \frac{1}{120}\left[-4R^\lambda_{\ \alpha}R_{\lambda\beta} + 2R^{\kappa\ \ \lambda}_{\ \alpha\ \beta}R_{\kappa\lambda} + 2R^{\lambda\mu\kappa}_{\ \ \ \ \ \alpha}R_{\lambda\mu\kappa\beta} + R_{;\alpha\beta} - 3\Box R_{\alpha\beta}\right]y^\alpha y^\beta\mathscr{G}_F
\end{aligned}
$$

---

① 对于形如

$$
g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + a^{(2)}_{\mu\nu} + a^{(3)}_{\mu\nu} + a^{(4)}_{\mu\nu}
$$

的微扰展开度规，我们有

$$
g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - a^{(2)\mu\nu} - a^{(3)\mu\nu} - a^{(4)\mu\nu} + a^{(2)\mu\lambda}a^{(2)\ \ \nu}_{\ \ \lambda},
$$

$$
\det(\eta_{\mu\nu} + a^{(2)}_{\mu\nu} + a^{(3)}_{\mu\nu} + a^{(4)}) = -1 - \eta^{\mu\nu}a^{(2)}_{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}a^{(3)}_{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}a^{(4)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\sigma\tau}a^{(2)}_{\mu\nu}a^{(2)}_{\sigma\tau} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\tau}a^{(2)}_{\mu\nu}a^{(2)}_{\sigma\tau},
$$

等式右边的指标由 $\eta_{\mu\nu}$ 及其逆升降。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{6}R^{\mu\ \ \nu}_{\ \alpha\ \beta;\gamma}y^\alpha y^\beta y^\gamma\partial_\mu\partial_\nu\mathscr{G}_F \\
&-\frac{1}{60}\left(6R_{\alpha\beta\ \ \gamma}^{\ \ \ ;\nu}-9R^\nu_{\ \alpha;\beta\gamma}+R^{\kappa\ \ \nu}_{\ \alpha\ \beta}R_{\kappa\gamma}-4R^\kappa_{\ \alpha\lambda\beta}R_\kappa^{\ \nu\ \lambda}{}_{\gamma}\right)y^\alpha y^\beta y^\gamma\partial_\nu\mathscr{G}_F \\
&-\left(\frac{1}{20}R^{\mu\ \ \nu}_{\ \alpha\ \beta;\gamma\delta}-\frac{1}{15}R^\mu_{\ \alpha\lambda\beta}R^{\lambda\ \ \nu}_{\ \gamma\ \delta}\right)y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta\partial_\mu\partial_\nu\mathscr{G}_F \\
=&-\delta^n(y),
\end{aligned}
\tag{5.2.8}
$$

再次强调所有的系数都在 x' 或 $y=0$ 处取值，例如，式 (5.2.8) 第三行中的 $\Box R_{\alpha\beta}$ 在黎曼法坐标系中就等于 $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu R_{\alpha\beta}|_{y=0}$。注意，在上面的计算中，我们已略去了系数中包含 $g_{\mu\nu}$ 四阶以上导数的项和 y^α 的四次方以上的项。顺便提一句，上面的方程适用于 n 维时空。

从 $\mathscr{G}_F(x,x')$ 的洛伦兹不变性知，在 x' 的黎曼法坐标邻域内，$\mathscr{G}_F(x,x')$ 只能是 $\eta_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta$ 的函数。对于这样的函数，直接计算表明，式 (5.2.8) 除去第一项之外，y^α 的 k 次项中 $\mathscr{G}_F$ 的一阶导数项与 y^α 的 $k+1$ 次项中 $\mathscr{G}_F$ 的二阶导数项正好抵消。所以，在 4 级近似下式 (5.2.8) 可以化简为

$$
\begin{aligned}
&\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\mathscr{G}_F+\left[m^2+\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R\right]\mathscr{G}_F+\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R_{;\alpha}y^\alpha\mathscr{G}_F \\
&+\frac{1}{2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R_{;\alpha\beta}y^\alpha y^\beta\mathscr{G}_F+\frac{1}{120}\left(-4R_\alpha^{\ \lambda}R_{\lambda\beta}+2R^{\kappa\ \ \lambda}_{\ \alpha\ \beta}R_{\kappa\lambda}\right. \\
&\left.+2R^{\lambda\mu\kappa}_{\ \ \ \ \alpha}R_{\lambda\mu\kappa\beta}+R_{;\alpha\beta}-3\Box R_{\alpha\beta}\right)y^\alpha y^\beta\mathscr{G}_F=-\delta^n(y)。
\end{aligned}
\tag{5.2.9}
$$

对方程 (5.2.9) 做傅里叶 (Fourier) 变换，即

$$
\mathscr{G}_F(y,0)=\int\frac{\mathrm{d}^nk}{(2\pi)^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\mathscr{G}_F(k),
\tag{5.2.10}
$$

其中，$ky=k_\alpha y^\alpha$，

$$
\mathscr{G}_F(k)=\int\mathrm{d}^ny\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathscr{G}_F(y),
\tag{5.2.11}
$$

即可得

$$
\left[k^2-m^2-\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R\right]\mathscr{G}_F(k)+\mathrm{i}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R_{;\alpha}\partial^\alpha\mathscr{G}_F(k)-a_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta\mathscr{G}_F(k)=1,
\tag{5.2.12}
$$

其中

$$
\partial^\alpha\mathscr{G}_F(k)\equiv\frac{\partial}{\partial k_\alpha}\mathscr{G}_F(k),
\tag{5.2.13}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{\alpha\beta}=&\frac{1}{2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R_{;\alpha\beta}+\frac{1}{120}R_{;\alpha\beta}-\frac{1}{40}\Box R_{\alpha\beta} \\
&-\frac{1}{30}R_\alpha^{\ \lambda}R_{\lambda\beta}+\frac{1}{60}R^{\kappa\ \ \lambda}_{\ \alpha\ \beta}R_{\kappa\lambda}+\frac{1}{60}R^{\lambda\mu\kappa}_{\ \ \ \ \alpha}R_{\lambda\mu\kappa\beta}。
\end{aligned}
\tag{5.2.14}
$$

在小距离或高频近似下，将 $\mathscr{G}_F(k)$ 按包含度规的导数展开，则有

$$\mathscr{G}_F(k) = \mathscr{G}_F^{(0)}(k) + \mathscr{G}_F^{(1)}(k) + \mathscr{G}_F^{(2)}(k) + \cdots, \tag{5.2.15}$$

最初两级近似是

$$\mathscr{G}_F^{(0)}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2}, \qquad \mathscr{G}_F^{(1)}(k) = 0, \tag{5.2.16}$$

将它们代入式 (5.2.12)，分别给出只含度规的二阶导数项和只含度规的三阶导数项满足的方程，即

$$(k^2 - m^2)\mathscr{G}_F^{(2)}(k) - \left(\xi - \frac{1}{6}\right) R\mathscr{G}_F^{(0)}(k) = 0,$$
$$(k^2 - m^2)\mathscr{G}_F^{(3)}(k) + \mathrm{i}\left(\xi - \frac{1}{6}\right) R_{;\alpha}\partial^\alpha \mathscr{G}_F^{(0)}(k) = 0,$$

它们的解是

$$\mathscr{G}_F^{(2)}(k) = \frac{\left(\xi - \frac{1}{6}\right) R}{(k^2 - m^2)^2}, \qquad \mathscr{G}_F^{(3)}(k) = -\mathrm{i}\frac{\left(\xi - \frac{1}{6}\right) R_{;\alpha}\partial^\alpha \mathscr{G}_F^{(0)}(k)}{k^2 - m^2}, \tag{5.2.17}$$

进一步将 $\mathscr{G}_F^{(0)}(k) \sim \mathscr{G}_F^{(3)}(k)$ 代入式 (5.2.12) 得到只含度规的四阶导数项满足的方程，即

$$(k^2 - m^2)\mathscr{G}_F^{(4)}(k) - \left(\xi - \frac{1}{6}\right) R\mathscr{G}_F^{(2)}(k) - a_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta \mathscr{G}_F^{(0)}(k) = 0, \tag{5.2.18}$$

其解为

$$\mathscr{G}_F^{(4)}(k) = \frac{\left(\xi - \frac{1}{6}\right) R\mathscr{G}_F^{(2)}(k) + a_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta \mathscr{G}_F^{(0)}(k)}{k^2 - m^2}, \tag{5.2.19}$$

于是，得到式 (5.2.12) 的 (4 级) 解为

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_F(k) = {} & \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{\left(\xi - \frac{1}{6}\right) R}{(k^2 - m^2)^2} - \mathrm{i}\frac{\left(\xi - \frac{1}{6}\right) R_{;\alpha}}{k^2 - m^2}\partial^\alpha \frac{1}{k^2 - m^2} \\ & + \frac{\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 R^2}{(k^2 - m^2)^3} + \frac{a_{\alpha\beta}}{k^2 - m^2}\partial^\alpha\partial^\beta \frac{1}{k^2 - m^2}。\end{aligned} \tag{5.2.20}$$

利用

$$(k^2 - m^2)^{-1}\partial^\alpha (k^2 - m^2)^{-1} = \frac{1}{2}\partial^\alpha (k^2 - m^2)^{-2},$$
$$(k^2 - m^2)^{-1}\partial^\alpha\partial^\beta (k^2 - m^2)^{-1} = \frac{1}{3}\partial^\alpha\partial^\beta (k^2 - m^2)^{-2} - \frac{2}{3}\eta^{\alpha\beta}(k^2 - m^2)^{-3}, \tag{5.2.21}$$

式 (5.2.20) 可以重写为

$$\mathscr{G}_F(k)=\frac{1}{k^2-m^2}+\frac{\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R}{(k^2-m^2)^2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R_{;\alpha}\partial^\alpha\frac{1}{(k^2-m^2)^2}$$
$$+\frac{1}{3}a_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta\frac{1}{(k^2-m^2)^2}+\frac{\left(\xi-\frac{1}{6}\right)^2R^2-\frac{2}{3}a^\lambda{}_\lambda}{(k^2-m^2)^3}。\tag{5.2.22}$$

回到坐标空间，可得

$$\mathscr{G}_F(y,0)=\int\frac{\mathrm{d}^nk}{(2\pi)^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\left[a_0(y,0)+a_1(y,0)\left(-\frac{\partial}{\partial m^2}\right)\right.$$
$$\left.+a_2(y,0)\left(\frac{\partial}{\partial m^2}\right)^2+\cdots\right]\frac{1}{k^2-m^2},\tag{5.2.23}$$

其中，对于标量场有

$$\begin{aligned}
a_0(y,0)&=1,\\
a_1(y,0)&=-\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R+\frac{1}{2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R_{;\alpha}y^\alpha-\frac{1}{3}a_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta,\\
a_2(y,0)&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\xi\right)^2R^2+\frac{1}{3}a^\lambda{}_\lambda\\
&=\frac{1}{180}R_{\alpha\beta\gamma\sigma}R^{\alpha\beta\gamma\sigma}-\frac{1}{180}R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}+\frac{1}{6}\left(\xi-\frac{1}{5}\right)\Box R+\frac{1}{2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)^2R^2。
\end{aligned}\tag{5.2.24}$$

在对 k_0 积分时，需用 $m^2-\mathrm{i}\epsilon$ 取代 m^2，以得到费曼传播子，即这一代换等效于取编时积的真空期待值。利用

$$\frac{1}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}=-\mathrm{i}\int_0^\infty\mathrm{d}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)},\qquad([s]=L^2),\tag{5.2.25}$$

有

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathrm{d}^nk}{(2\pi)^n}\exp\left[\mathrm{i}s(k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)-\mathrm{i}ky\right]\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^nk}{(2\pi)^n}\exp\left[\mathrm{i}s\left(k-\frac{y}{2s}\right)^2-\mathrm{i}m^2s+\frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right]\\
=&\frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^{n/2}(\mathrm{i}s)^{n/2}}\exp\left(-\mathrm{i}m^2s+\frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right),
\end{aligned}\tag{5.2.26}$$

其中

$$\sigma\equiv\frac{1}{2}y^\alpha y_\alpha。$$

于是，有

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_F(y,0)=&\left[a_0(y,0)+a_1(y,0)\left(-\frac{\partial}{\partial m^2}\right)+a_2(y,0)\left(\frac{\partial}{\partial m^2}\right)^2+\cdots\right]\\&\times(-\mathrm{i})\int_0^\infty \mathrm{d}s\frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^{n/2}(\mathrm{i}s)^{n/2}}\exp\left(-\mathrm{i}m^2s+\frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right)\\=&\frac{-\mathrm{i}}{(4\pi)^{n/2}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}s}{(\mathrm{i}s)^{n/2}}\exp\left(-\mathrm{i}m^2s+\frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right)F(x,x';\mathrm{i}s),\end{aligned}\tag{5.2.27}$$

其中

$$F(x,x';\mathrm{i}s)=a_0+a_1(x,x')\mathrm{i}s+a_2(x,x')(\mathrm{i}s)^2+\cdots。\tag{5.2.28}$$

利用式 (5.2.4) 并变回到一般的坐标系中，得到费曼格林函数的德维特–施温格展开，即

$$\begin{aligned}&G_F^{DS}(x,x')\\&=-\frac{\mathrm{i}\pi\varDelta^{1/2}(x,x')}{(4\pi)^{n/2}}\sum_{j=0}^\infty a_j\left(-\frac{\partial}{\partial m^2}\right)^j\int_0^\infty\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}s}{(\mathrm{i}s)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\mathrm{i}m^2s+\frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right)\end{aligned}\tag{5.2.29}$$

$$=-\frac{\mathrm{i}\varDelta^{1/2}(x,x')}{(4\pi)^{n/2}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}s}{(\mathrm{i}s)^{n/2}}\exp\left(-\mathrm{i}m^2s+\frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right)F(x,x';\mathrm{i}s),\tag{5.2.30}$$

其中

$$\varDelta(x,x')\equiv-[-g(x)]^{-1/2}\det\left[\partial_\mu\partial_\nu\sigma(x,x')\right][-g(x')]^{-1/2}\tag{5.2.31}$$

是范弗莱克 (Van Vleck) 行列式，在 x' 的黎曼法坐标系中，$\varDelta(x,x')=[-g(y)]^{-1/2}$。从式 (5.2.30) 的导出，我们看到 s 仅是一个积分变量，它没有直接的物理意义。但是 ① s 具有与 σ 一样的量纲，即 L^2; ② 在坐标变换下 s 是不变的，因此，s 可解释为“固有时”的平方，上面的小距离展开式 (5.2.30) 称为德维特–施温格固有时展开。

作变量代换[38]

$$z^2=2m^2\sigma,\qquad u=\frac{-2\mathrm{i}m^2s}{z},\tag{5.2.32}$$

(注意：m^2 需用 $m^2-\mathrm{i}\epsilon$ 代换，并在计算的最后取 $\epsilon\to0$，这一代换意味着 z 的虚部是一个小于零的小量。) 则 G_F^{DS}(式 (5.2.29)) 中的积分部分可以写为[39]

$$\left(-\frac{z}{2m^2}\right)^{1-\frac{n}{2}}\int_0^{0^--\mathrm{i}\infty}\mathrm{d}uu^{-\frac{n}{2}}\exp\left[\frac{z}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)\right]=-\mathrm{i}\pi\left(-\frac{z}{2m^2}\right)^{1-\frac{n}{2}}\mathrm{H}^{(2)}_{\frac{n}{2}-1}(z),\tag{5.2.33}$$

其中，$\mathrm{H}^{(2)}_{\frac{n}{2}-1}$ 是 $\left(\frac{n}{2}-1\right)$ 阶第二类汉克尔 (Hankel) 函数。所以，费曼格林函数的德维特–施温格固有时展开还可以写成

$$G_F^{DS}(x,x')\approx-\frac{\mathrm{i}\pi\Delta^{1/2}(x,x')}{(4\pi\mathrm{i})^{n/2}}\sum_{j=0}^{\infty}a_j\left(-\frac{\partial}{\partial m^2}\right)^j \left\{\left(\frac{2m^2}{-\sigma}\right)^{(n-2)/4}\mathrm{H}^{(2)}_{(n-2)/2}\left[(2m^2\sigma)^{1/2}\right]\right\}, \tag{5.2.34}$$

其中，a_j 可由如下递推公式从 a_{j-1} 导出，即

$$\sigma^{;\mu}a_{j;\mu}+ja_j=D^{-1/2}(\Box-\xi R)(D^{1/2}a_{j-1}), \tag{5.2.35}$$

$$D(x,x')\equiv-\det\left[-\partial_\mu\partial_\nu\sigma(x,x')\right], \tag{5.2.36}$$

特别地，当 $n=4$ 时，$\mathrm{H}^{(2)}_{(n-2)/2}=\mathrm{H}^{(2)}_1(2m^2\sigma)^{1/2}$，当 $z\to 0$ 时，有

$$\mathrm{H}^{(2)}_1(z)\to\frac{\mathrm{i}}{\pi}\frac{2}{z}+\left[1+\frac{\mathrm{i}}{\pi}(1-2\gamma)-\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\ln\frac{z}{2}\right]\frac{z}{2}+O(z^3)\to\infty, \tag{5.2.37}$$

其中，$\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)\simeq 0.577$ 是欧拉常数，$O(z^3)$ 代表 z^3 量级或更高量级的小量。此时，a_0 项变为

$$G_F^{DS}(x,x')=\frac{\Delta^{1/2}}{16\pi\sigma}(2m^2\sigma)^{1/2}\mathrm{H}^{(2)}_1\left[(2m^2\sigma)^{1/2}\right], \tag{5.2.38}$$

比较费曼传播子的高斯近似[40]

$$G_F(x,x')\approx\frac{\Delta^{1/2}}{16\pi\sigma}z\mathrm{H}^{(2)}_1(z),\qquad z=\left\{2\left[m^2+\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R\right]\sigma\right\}^{1/2} \tag{5.2.39}$$

可知，当 $R=0$ 或 $\xi=\dfrac{1}{6}$ 时，德维特–施温格展开的 a_0 项就是高斯近似。

5.3　单圈有效作用量

在这一节中，我们利用 $G_F(x,y)$ 的德维特–施温格展开来讨论单圈有效作用量。由式 (5.1.29) 知

$$G_F=-K^{-1}=-\mathrm{i}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ks}\mathrm{d}s, \tag{5.3.1}$$

所以有

$$G_F(x,x')=\langle x|\hat{G}_F|x'\rangle=-\mathrm{i}\int_0^{\infty}\langle x|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{K}s}|x'\rangle\mathrm{d}s, \tag{5.3.2}$$

结合 $G_F^{DS}(x,x')$(式 (5.2.30))，得

$$\langle x|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{K}s}|x'\rangle = \mathrm{i}\frac{\varDelta^{\frac{1}{2}}(x,x')}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}(\mathrm{i}s)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\mathrm{i}m^2s+\frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right)F(x,x';\mathrm{i}s)。\tag{5.3.3}$$

应用余弦和正弦积分函数

$$\begin{cases}\mathrm{Ci}(x)\equiv -\displaystyle\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t = \gamma+\ln x+\int_0^x\frac{\cos t-1}{t}\mathrm{d}t,\\ \mathrm{si}(x)\equiv -\displaystyle\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}+\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\equiv -\frac{\pi}{2}+\mathrm{Si}(x),\end{cases}\tag{5.3.4}$$

可以得到

$$\begin{aligned}&\int_\varLambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ks}}{s}\mathrm{d}s = \int_{K\varLambda}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ks}}{Ks}\mathrm{d}(Ks)\\ =&-[\mathrm{Ci}(K\varLambda)-\mathrm{i}\,\mathrm{si}(K\varLambda)]\equiv -\mathrm{Ei}(-\mathrm{i}K\varLambda)\\ =&-\gamma-\ln(\mu^{-2}K)-\ln(\mu^2\varLambda)-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}-\int_0^\varLambda\frac{\cos Ks-\mathrm{i}\sin Ks-1}{s}\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{5.3.5}$$

如果 $\varLambda$ 充分小，以至于最后一项可以被忽略，于是有

$$\begin{aligned}\int_\varLambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ks}}{s}\mathrm{d}s &\xrightarrow{\varLambda\to 0}[-\gamma-\ln\mathrm{i}-\ln(\mu^2\varLambda)]-\ln(\mu^{-2}K)\\ &\xrightarrow{\varLambda\to 0}\infty-\ln(\mu^{-2}K),\end{aligned}\tag{5.3.6}$$

发散项是与度规无关的常数，可以被吸收进重整化常数，所以有

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ks}}{s}\mathrm{d}s = -\ln(\mu^{-2}K) = \ln(-\mu^2G_F)。\tag{5.3.7}$$

可以证明

$$\langle x|\ln(-\mu^2\hat{G}_F^{DS})|x'\rangle = -\int_{m^2}^\infty G_F^{DS}(x,x')\mathrm{d}m^2。\tag{5.3.8}$$

证明：利用式 (5.3.7) 和式 (5.3.3)，式 (5.3.8) 的左边可写为

$$\begin{aligned}&\langle x|\ln(-\mu^2\hat{G}_F^{DS})|x'\rangle = \langle x|\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{K}s}s^{-1}\mathrm{d}s|x'\rangle\\ =&\,\mathrm{i}\frac{\varDelta^{\frac{1}{2}}(x,x')}{(4\pi)^{n/2}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}s}{(\mathrm{i}s)^{1+n/2}}\exp\left(-\mathrm{i}m^2s+\frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right)F(x,x';\mathrm{i}s),\end{aligned}\tag{5.3.9}$$

其中，第一个等号由已扔掉发散项的式 (5.3.7) 得到，第二个等号由式 (5.3.3) 得到。另外，式 (5.3.8) 的右边可写为

$$\begin{aligned}&-\int_{m^2}^\infty G_F^{DS}(x,x')\mathrm{d}m^2\\ =&\,\mathrm{i}\frac{\varDelta^{1/2}(x,x')}{(4\pi)^{n/2}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}s}{(\mathrm{i}s)^{n/2}}\int_{m^2}^\infty\mathrm{d}m^2\exp\left(-\mathrm{i}m^2s+\frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right)F(x,x';\mathrm{i}s),\end{aligned}\tag{5.3.10}$$

并且

$$\int_{m^2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}\mathrm{d}m^2 = \frac{1}{-\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}\Big|_{m^2}^{+\infty} = \frac{1}{\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s} + \frac{1}{-\mathrm{i}(s-\mathrm{i}\epsilon)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\infty(s-\mathrm{i}\epsilon)}, \quad (5.3.11)$$

可见，当 s 延拓到下半复平面，两边相等。　　　　证毕

由式 (5.1.19) 知

$$\Gamma = -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Tr}\big[\ln(-\mu^2 G_F)\big] = \frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^n x\sqrt{-g(x)}\lim_{x\to x'}\int_{m^2}^{\infty} G_F^{DS}(x,x')\mathrm{d}m^2, \quad (5.3.12)$$

或

$$\Gamma = \frac{1}{2}\mathrm{i}\int_{m^2}^{\infty}\mathrm{d}m^2\int \mathrm{d}^n x\sqrt{-g(x)}G_F^{DS}(x,x)。 \quad (5.3.13)$$

这是对有效作用量的单圈贡献，或者称 Γ 为单圈有效作用量。

根据定义，有效拉格朗日量 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$ 通过式 (5.3.14) 与 Γ 相联系，即

$$\Gamma \equiv \int \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}(x)\sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^n x \quad (5.3.14)$$

比较式 (5.3.12) 和式 (5.3.14) 知，4 维有效拉氏量为

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}(x) =& \frac{\mathrm{i}}{2}\lim_{x\to x'}\int_{m^2}^{\infty}\mathrm{d}m^2 G_F^{DS}(x,x)\\
=& \frac{\mathrm{i}}{2}\lim_{x\to x'}\int_{m^2}^{\infty}\mathrm{d}m^2\left[-\mathrm{i}\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}(x,x')}{(4\pi)^{n/2}}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}s}{(\mathrm{i}s)^{n/2}}\exp\left(-\mathrm{i}m^2 s+\frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right)F(x,x';\mathrm{i}s)\right]\\
=& \frac{1}{2}\lim_{x\to x'}\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}(x,x')}{(4\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}s}{(\mathrm{i}s)^3}\exp\left(-\mathrm{i}m^2 s+\frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right)F(x,x';\mathrm{i}s)\\
=& \lim_{x\to x'}\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}(x,x')}{2(4\pi)^{n/2}}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}s}{(\mathrm{i}s)^{1+n/2}}\exp\left(-\mathrm{i}m^2 s+\frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right)\\
&\times\big[a_0+a_1(x,x')\mathrm{i}s+a_2(x,x')(\mathrm{i}s)^2+\cdots\big]。
\end{aligned} \quad (5.3.15)$$

注意：积分之后，仍保留指数因子 $\exp\left(-\mathrm{i}m^2 s+\frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right)$，当 $x\to x'$，$\sigma\to 0$，$-\mathrm{i}(m^2-\mathrm{i}\epsilon)s = -\mathrm{i}m^2 s-\epsilon s$，并且 $s\to\infty$ 时，$\exp[-\mathrm{i}m^2 s-\epsilon s]\to 0$，所以对积分上限，当 $x\to x',\sigma\to 0$ 时，$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$ 是收敛的。在 4 维时，积分的前三项在 $s\to 0$ 时分别是潜在的平方发散项、线性发散项和对数发散项。我们用 $\mathscr{L}_{\mathrm{div}}$ 记这三项，即

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\mathrm{div}} =& -\lim_{x\to x'}\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}(x,x')}{32\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{s^3}\exp\left(-\mathrm{i}m^2 s+\frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right)\\
&\big[a_0+a_1(x,x')\mathrm{i}s+a_2(x,x')(\mathrm{i}s)^2\big]。
\end{aligned} \quad (5.3.16)$$

在 $x\to x'$ 的极限下，对于标量场 a_0、a_1、a_2 由式 (5.2.24) 给出，a_3 包含 46 项，有关内容可见文献 [41]~[43]。

值得注意的是以下 3 点。

(1) $\mathscr{L}_{\text{div}}$ 虽然来自量子物质场，但是它由局部张量 $R_{\alpha\beta\gamma\sigma}$ 及其缩并构建，是一个纯几何量，所以我们最好把它视为对引力场而不是量子物质场的贡献。深层的物理含义可能是：在单圈近似下，量子物质场的真空涨落可能改变引力场或时空背景几何。

(2) 对于某一确定的量子物质场，$\mathscr{L}_{\text{div}}$ 与物质场的量子态毫无关系。

(3) $\mathscr{L}_{\text{div}}$ 与 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 分别是协变的。

第 6 章　正规化与重整化

6.1　维数正规化

在第 5 章中，我们已经把 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 的发散部分与它的收敛部分协变地分离开，现在引进补偿项以抵消发散部分。

在本节中，我们引进维数正规化方法，其步骤是：

(1) 把时空的维数从物理的 4 维解析延拓到非物理的 $n \neq 4$ 维;

(2) 当 $n \neq 4$ 维时，把量子物质场有效拉氏量 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 的发散部分 $\mathscr{L}_{\text{div}}$ 与非发散部分 $\mathscr{L}_{\text{ren}}$ 协变分离开，即

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \mathscr{L}_{\text{div}} + \mathscr{L}_{\text{ren}}; \tag{6.1.1}$$

(3) 把 $\mathscr{L}_{\text{div}}$ 与引力拉氏量 $\mathscr{L}_g$ 相结合，得到一个新的引力拉氏量 $\bar{\mathscr{L}_g}$，即

$$\bar{\mathscr{L}_g} = \mathscr{L}_g + \mathscr{L}_{\text{div}}。 \tag{6.1.2}$$

在引力拉氏量中引进裸的引力耦合常数 $\varLambda_B$、G_B、a_B、b_B 用以吸收 $\mathscr{L}_{\text{div}}$，从而得到物理测量的引力耦合常数 $\varLambda$、G、a 与 b;

(4) 从

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\bar{\mathscr{L}_g} + \mathscr{L}_{\text{ren}})}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \tag{6.1.3}$$

得到半经典引力场方程;

(5) 在计算的最后取 4 维极限。

这就是所谓的维数正规化，或维数重整化。注意，正规化意味着把 $\mathscr{L}_{\text{div}}$ 协变地与 $\mathscr{L}_{\text{ren}}$ 分离开来；重整化意味着引进抵消项 (补偿项) 以抵消发散项。

第 5 章，我们已得到，在 n 维情况，$\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 单圈近似的渐近展开为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} \sim \lim_{x \to x'} \frac{\varDelta^{\frac{1}{2}}(x,x')}{2(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,x') \int_0^{\infty} (\mathrm{i}s)^{j-1-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m^2 s - \frac{\sigma}{2s})} \mathrm{i}\mathrm{d}s, \tag{5.3.15}$$

其中

$$\begin{cases} \sigma(x,x') = \dfrac{1}{2} g_{\mu\nu}(x')(x^\mu - x'^\mu)(x^\nu - x'^\nu), \\ \dfrac{\partial}{\partial x^a}\dfrac{\partial}{\partial x^b}\sigma(x,x') = \dfrac{1}{2} g_{\mu\nu}(\delta^\mu_b \delta^\nu_a + \delta^\nu_b \delta^\mu_a) = g_{ab}, \\ \lim\limits_{x \to x'} \varDelta(x,x') = -\lim\limits_{x \to x'} [-g(x)]^{-1/2} \det[\partial_a \partial_b \sigma(x,x')][-g(x')]^{-1/2} \\ \qquad\qquad\qquad = g^{-1}\det(g_{ab}) = 1, \end{cases} \tag{6.1.4}$$

所以有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{eff}} \simeq & \frac{1}{2}(4\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x)\int_0^{\infty}(\mathrm{i}s)^{j-1-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2s}\mathrm{i}\mathrm{d}s\\ = & \frac{1}{2}(4\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x)(m^2)^{\frac{n}{2}-j}\Gamma\left(j-\frac{n}{2}\right),\end{aligned} \tag{6.1.5}$$

其中，$a_j(x)=a_j(x,x)$，$\Gamma(z)=\displaystyle\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$ 是 Γ 函数。

由于我们关心的是 4 维时空中拉氏量的维数正规化和维数重整化，故只需将 n 延拓到 4 的一个邻域内，并要求 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 的量纲即使在 $n\neq 4$ 时仍然是 (长度)$^{-4}$ 或 (质量)^4，为此，必须引进一个任意的质量标度量 μ(它可与 5.1 节中引入的 μ 相同，也可以不同)，并把式 (6.1.5) 重写成

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}=\frac{1}{2}(4\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4}\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x)m^{4-2j}\Gamma\left(j-\frac{n}{2}\right)。 \tag{6.1.6}$$

在 $n\to 4$(且已有 $\sigma\to 0$) 时，式 (6.1.6) 中前三项是发散的，因为

$$\begin{cases}\Gamma\left(-\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{4}{n(n-2)}\left(\dfrac{2}{4-n}-\gamma\right)+O(n-4),\\ \Gamma\left(1-\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{2}{2-n}\left(\dfrac{2}{4-n}-\gamma\right)+O(n-4),\\ \Gamma\left(2-\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{2}{4-n}-\gamma+O(n-4),\end{cases} \tag{6.1.7}$$

其中，γ 是欧拉常数，$O(n-4)$ 表示 $n-4$ 阶和高于 $n-4$ 阶的小量。把前 3 项结合起来，得

$$\mathscr{L}_{\text{div}}=-(4\pi)^{-\frac{n}{2}}\left\{\frac{1}{n-4}+\frac{1}{2}\left[\gamma+\ln(\frac{m^2}{\mu^2})\right]\right\}\times\left[\frac{4m^4a_0}{n(n-2)}+\frac{2m^2a_1}{2-n}+a_2\right], \tag{6.1.8}$$

这里，我们已对 $\left(\dfrac{m}{\mu}\right)^{n-4}$ 应用公式 $a^x=1+x\ln a+\cdots$，即

$$\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4}=\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{\frac{n-4}{2}}=1+\frac{1}{2}(n-4)\ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)+o(n-4), \tag{6.1.9}$$

其中，$o(n-4)$ 表示高于 $n-4$ 的高阶小量。于是，对于标量场有

$$\begin{aligned}\bar{\mathscr{L}}_g= & \mathscr{L}_g+\mathscr{L}_{\text{div}}\\ = & -\left(A+\frac{\Lambda_{\text{B}}}{8\pi G_{\text{B}}}\right)+\left(B+\frac{1}{16\pi G_{\text{B}}}\right)R\\ & -\frac{a_2(x)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\left\{\frac{1}{n-4}+\frac{1}{2}\left[\gamma+\ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)\right]\right\},\end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{4m^4}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} n(n-2)} \left\{ \frac{1}{n-4} + \frac{1}{2} \left[\gamma + \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] \right\}, \\
B &= \frac{2m^2 \left(\frac{1}{6} - \xi \right)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} (n-2)} \left\{ \frac{1}{n-4} + \frac{1}{2} \left[\gamma + \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] \right\}。
\end{aligned} \tag{6.1.10}
$$

从式 (6.1.8) 和式 (6.1.10) 可以明白，引进一个任意质量量纲的量 μ 之目的是使对数号中的量无量纲。如果定义

$$
A + \frac{\Lambda_{\mathrm{B}}}{8\pi G_{\mathrm{B}}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \qquad B + \frac{1}{16\pi G_{\mathrm{B}}} = \frac{1}{16\pi G}, \tag{6.1.11}
$$

或

$$
\Lambda = 8\pi G \left(A + \frac{\Lambda_{\mathrm{B}}}{8\pi G_{\mathrm{B}}} \right), \qquad G = \frac{G_{\mathrm{B}}}{1 + 16\pi G_{\mathrm{B}} B}, \tag{6.1.12}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathscr{L}}_g &= -\frac{\Lambda}{8\pi G} + \frac{1}{16\pi G} R - \frac{a_2(x)}{(4\pi)^{n/2}} \left\{ \frac{1}{n-4} + \frac{1}{2} \left[\gamma + \ln (\frac{m^2}{\mu^2}) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{16\pi G} \left(R - 2\Lambda - \frac{16\pi G a_2(x)}{(4\pi)^{n/2}} \left\{ \frac{1}{n-4} + \frac{1}{2} \left[\gamma + \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] \right\} \right) \\
&= \frac{1}{16\pi G} \left(R - 2\Lambda + \alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \varepsilon R^{\mu\nu\lambda\rho} R_{\mu\nu\lambda\rho} + \delta \Box R \right),
\end{aligned} \tag{6.1.13}
$$

其中

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\alpha = -\left(\frac{1}{6} - \xi \right)^2 \frac{8\pi G}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left\{ \frac{1}{n-4} + \frac{1}{2} \left[\gamma + \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \right] \right\} \sim \frac{1}{n-4}, \\
&\beta \sim \frac{1}{n-4}, \qquad \varepsilon \sim \frac{1}{n-4}, \qquad \delta \sim \frac{1}{n-4}。
\end{aligned}
\right. \tag{6.1.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(8\pi G \bar{S}_g)}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left(8\pi G \int \sqrt{-g} \bar{\mathscr{L}}_g \mathrm{d}^n x \right) \\
&= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha {}^{(1)}\mathrm{H}_{\mu\nu} + \beta {}^{(2)}\mathrm{H}_{\mu\nu} + \varepsilon \mathrm{H}_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{6.1.15}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
{}^{(1)}\mathrm{H}_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int (-g)^{1/2} R^2 \mathrm{d}^n x \\
&= 2R_{;\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} \Box R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 + 2R R_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{6.1.16}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{(2)}\mathrm{H}_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int (-g)^{1/2} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \mathrm{d}^n x \\
&= 2R^{\alpha}_{\mu;\nu\alpha} - \Box R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Box R + 2R^{\alpha}_{\mu} R_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{6.1.17}
$$

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_{\mu\nu}\equiv&\frac{1}{(-g)^{1/2}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int(-g)^{1/2}R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{d}^nx\\=&-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}+2R_{\mu\alpha\beta\gamma}R_{\nu}{}^{\alpha\beta\gamma}-4\Box R_{\mu\nu}\\&+2R_{;\mu\nu}-4R_{\mu\alpha}R^{\alpha}_{\nu}+4R^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}。\end{aligned}\tag{6.1.18}$$

注意：

(1) 从高斯定理

$$\int_{\Sigma}\sqrt{-g}\Box R\mathrm{d}^nx=\oint_{\partial\Sigma}R^{;\mu}\sqrt{-g}\mathrm{d}\sigma_{\mu}^{n-1}\tag{6.1.19}$$

可知，变分导数 $\dfrac{2}{\sqrt{-g}}\dfrac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\displaystyle\int\sqrt{-g}\Box R\mathrm{d}^nx$ 是零；

(2) 当 $n=4$ 时，从推广的高斯–博内 (Bonnet) 定理 (也称为高斯–博内–陈定理，它对偶数维的紧致黎曼流形成立) 知

$$\chi=\frac{1}{8\pi^2}\int\mathrm{d}^4x\sqrt{-g}(R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}+R^2-4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta})\tag{6.1.20}$$

是一个拓扑不变量 (欧拉示性数)，它对度规的变分是零，这导致

$$\mathrm{H}_{\mu\nu}=-{}^{(1)}\mathrm{H}_{\mu\nu}+4{}^{(2)}\mathrm{H}_{\mu\nu}。\tag{6.1.21}$$

将式 (6.1.21) 代入式 (6.1.15)，并用 a 和 b 表示重新组合后的系数。在 α、β 和 ε 中都有一个 $\dfrac{1}{n-4}$ 的项，它们在 $n\to4$ 时是发散的。为去掉这个发散项，我们在原始的引力拉氏量中引入包含更高阶的具有裸参数 a_{B} 和 b_{B} 的项，通过上述步骤，并用 a_{B} 和 b_{B} 抵消掉 a 和 b 中的发散项，得到物理的耦合常数 a 和 b。为了与实验一致，a 与 b 应该很小。当 a，b 为零时，就回到带宇宙常数的爱因斯坦理论。

于是，我们看到，弯曲时空量子场论指出，最一般的引力理论可以包含度规张量的更高阶导数项，即

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta g^{\mu\nu}}=0\tag{6.1.22}$$

或

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\Lambda g_{\mu\nu}+a{}^{(1)}\mathrm{H}_{\mu\nu}+b{}^{(2)}\mathrm{H}_{\mu\nu}=-8\pi G\left(\frac{{}_{\mathrm{out}}\langle0|\hat{T}_{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{in}}}{{}_{\mathrm{out}}\langle0|0\rangle_{\mathrm{in}}}\right)_{\mathrm{ren}},\tag{6.1.23}$$

这里

$$\begin{cases}\bar{\Gamma}=\int\sqrt{-g}\mathrm{d}^nx(\bar{\mathscr{L}}_g+\mathscr{L}_{\mathrm{ren}})\\\bar{\mathscr{L}}_g=(16\pi G)^{-1}(R-2\Lambda+aR^2+bR^{\mu\nu}R_{\mu\nu})\\\dfrac{2}{\sqrt{-g}}\dfrac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int\sqrt{-g}\mathscr{L}_{\mathrm{ren}}\mathrm{d}^nx=\left(\dfrac{{}_{\mathrm{out}}\langle0|\hat{T}_{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{in}}}{{}_{\mathrm{out}}\langle0|0\rangle_{\mathrm{in}}}\right)_{\mathrm{ren}}\equiv\langle\hat{T}_{\mu\nu}\rangle_{\mathrm{ren}}。\end{cases}\tag{6.1.24}$$

现在，我们来证明

$$\mathscr{L}_{\text{ren}} = -\frac{1}{64\pi^2}\int_0^{\infty} \ln(\mathrm{i}s)\frac{\partial^3}{\partial(\mathrm{i}s)^3}\left[F(x,x;\mathrm{i}s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}\right]\mathrm{i}\mathrm{d}s。\tag{6.1.25}$$

证明：由式 (5.3.15) 知

$$\mathscr{L}_{\text{ren}} \approx \frac{1}{32\pi^2}\int_0^{\infty}\sum_{j=3}^{\infty} a_j(x)(\mathrm{i}s)^{j-3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}\mathrm{i}\mathrm{d}s,\tag{6.1.26}$$

做 3 次分部积分，可得

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\text{ren}} \approx& \frac{1}{32\pi^2}\int_0^{\infty}(\mathrm{i}s)^{-3}\left[a_3(\mathrm{i}s)^3 + a_4(\mathrm{i}s)^4 + \cdots\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}\mathrm{d}(\mathrm{i}s)\\
=& \frac{1}{32\pi^2}\left\{-\frac{1}{2}(\mathrm{i}s)^{-2}\left[a_3(\mathrm{i}s)^3 + a_4(\mathrm{i}s)^4 + \cdots\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}\Big|_0^{\infty}\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\mathrm{i}s)^{-2}\frac{\partial}{\partial(\mathrm{i}s)}\left[(a_3(\mathrm{i}s)^3+\cdots)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}\right]\mathrm{d}(\mathrm{i}s)\right\}\\
=& \frac{1}{64\pi^2}\left\{-(\mathrm{i}s)^{-1}\frac{\partial}{\partial(\mathrm{i}s)}\left[(a_3(\mathrm{i}s)^3+\cdots)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}\right]\Big|_0^{\infty}\right.\\
&\left.+\int_0^{\infty}(\mathrm{i}s)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial(\mathrm{i}s)^2}\left[(a_3(\mathrm{i}s)^3+\cdots)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}\right]\mathrm{d}(\mathrm{i}s)\right\}\\
=& \frac{1}{64\pi^2}\ln(\mathrm{i}s)\frac{\partial^2}{\partial(\mathrm{i}s)^2}\left[(a_3(\mathrm{i}s)^3+\cdots)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}\right]\Big|_0^{\infty}\\
&-\frac{1}{64\pi^2}\int_0^{\infty}\ln(\mathrm{i}s)\frac{\partial^3}{\partial(\mathrm{i}s)^3}\left[(a_3(\mathrm{i}s)^3+\cdots)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}\right]\mathrm{d}(\mathrm{i}s),
\end{aligned}\tag{6.1.27}$$

最后的积分等于

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{64\pi^2}\int_0^{\infty}\ln(\mathrm{i}s)\frac{\partial^3}{\partial(\mathrm{i}s)^3}\left[F(x,x;\mathrm{i}s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}\right]\mathrm{d}(\mathrm{i}s)\\
&+\frac{1}{64\pi^2}\int_0^{\infty}\ln(\mathrm{i}s)\frac{\partial^3}{\partial(\mathrm{i}s)^3}\left\{\left[a_0 + a_1(\mathrm{i}s)^1 + a_2(\mathrm{i}s)^2\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}\right\}\mathrm{d}(\mathrm{i}s)。
\end{aligned}\tag{6.1.28}$$

注意：m^2 实际上是 $m^2 - \mathrm{i}\epsilon$，那么三个边界项为零。式 (6.1.28) 第二个积分是有限的，它与 $\mathscr{L}_{\text{div}}$ 对 $a_j(j=0,1,2)$ 的依赖关系是一致的，若将之吸收进 $\mathscr{L}_{\text{div}}$, 仅仅是对 Λ、G、a、b 等做有限的重整。重整化的有效拉氏量无法在这种有限重整项上给出确切的方案，故可通过把它吸收到 $\mathscr{L}_{\text{div}}$ 中而扔掉。于是，证明完成。

6.2　ζ 函数正规化

假定 $|m\rangle$ 是希尔伯特空间上算子

$$K = -G_F^{-1}\tag{6.2.1}$$

的本征态矢，即

$$K|m\rangle = \lambda_m|m\rangle,$$
$$K^\nu|m\rangle = \lambda_m^\nu|m\rangle。\tag{6.2.2}$$

从

$$\sum_m |m\rangle\langle m| = 1,$$

容易证明

$$K^{-1} = -G_F = \sum_m \frac{|m\rangle\langle m|}{\lambda_m},$$
$$(K^{-1})^\nu = (-G_F)^\nu = \sum_m \lambda_m^{-\nu}|m\rangle\langle m|。\tag{6.2.3}$$

现在让我们回顾一下 ζ 函数通常的定义。人们把它定义为

$$\zeta(\nu) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\nu},\tag{6.2.4}$$

其中，m 是自然数，ν 是复数。黎曼证明，除去位于 $\nu = 1$ 的一个一级极点外，$\zeta(\nu)$ 可以被解析延拓到整个复 ν 平面上，特别地，

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \qquad \zeta(1) = \infty, \qquad \zeta(2n) = 0。\tag{6.2.5}$$

推广的 ζ 函数则定义为

$$\zeta(\nu, a) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+a)^\nu}, \qquad \zeta(\nu) = \zeta(\nu, 1)。\tag{6.2.6}$$

现在我们进一步推广 ζ 函数。在 x 空间，从

$$\mathrm{Tr}(-G_F)^\nu = \int \sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^4x \sum_m \lambda_m^{-\nu}\langle x|m\rangle\langle m|x\rangle = \sum_m \lambda_m^{-\nu},\tag{6.2.7}$$

定义广义 ζ 函数

$$\tilde{\zeta}(\nu) \equiv \mathrm{Tr}(-G_F)^\nu = \sum_m \lambda_m^{-\nu},\tag{6.2.8}$$

其中，在式 (6.2.7) 中用到完备性条件

$$\int \sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^4x|x\rangle\langle x| = 1。$$

式 (6.2.8) 中的 m 是本征态的标记，它不必像通常的 ζ 函数和推广的 ζ 函数那样是一个整数。

有效作用量式 (5.1.19) 可以改写成

$$\Gamma = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\lim_{\nu\to 0}\mathrm{Tr}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}(-\mu^2 G_F)^\nu, \tag{6.2.9}$$

因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}f^\nu = f^\nu \ln f$。因此

$$\begin{aligned}\Gamma &= -\frac{1}{2}\mathrm{i}\lim_{\nu\to 0}\mu^{2\nu}\mathrm{Tr}\left[(\ln\mu^2)(-G_{\mathrm{F}})^\nu + (-G_{\mathrm{F}})^\nu\ln(-G_{\mathrm{F}})\right]\\ &= \lim_{\nu\to 0}\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\mu^{2\nu}\left[\tilde{\zeta}'(\nu)+\tilde{\zeta}(\nu)\ln\mu^2\right]\right\}\\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{i}\left[\tilde{\zeta}'(0)+\tilde{\zeta}(0)\ln\mu^2\right],\end{aligned} \tag{6.2.10}$$

式 (6.2.10) 是有效作用量的广义 ζ 函数表示。

当 $\nu = 0$ 时，级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} m^{-\nu}$ 没有意义，但黎曼已经证明， 可以把 ν 从收敛域 $\mathrm{Re}(\nu) > 1$ 解析延拓到 $\nu = 0$，得到一个明确的值 $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$。根据定义，它恰是 $\zeta(0)$ 的值。对于广义ζ函数 $\tilde{\zeta}(0)$ 和 $\tilde{\zeta}'(0)$ 的定义这也是相同的，我们将看到，正是靠这样的数学技巧，人们可以自动地抵消单圈发散并实现正规化和重整化，这就是所谓的 ζ 函数正规化。现在，让我们开始寻求 $\tilde{\zeta}(0)$ 和 $\tilde{\zeta}'(0)$ 的 D-S 固有时展开。

首先，我们注意

$$\int_0^\infty (\mathrm{i}s)^{\nu-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ks}\mathrm{d}(\mathrm{i}s) = K^{-\nu}\Gamma(\nu), \tag{6.2.11}$$

它是 Γ 函数的积分表示，从

$$(-G_F)^\nu = K^{-\nu} = (\Gamma(\nu))^{-1}\int_0^\infty (\mathrm{i}s)^{\nu-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ks}\mathrm{i}\mathrm{d}s \tag{6.2.12}$$

可知

$$\tilde{\zeta}(\nu) \equiv \mathrm{Tr}(-G_{\mathrm{F}})^\nu = [\Gamma(\nu)]^{-1}\int\sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^4x\int_0^\infty(\mathrm{i}s)^{\nu-1}\langle x|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ks}|x\rangle\mathrm{i}\mathrm{d}s。 \tag{6.2.13}$$

我们回忆如下的展开 (式 (5.3.3))

$$\langle x|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ks}|x'\rangle = \mathrm{i}(\mathrm{i}s)^{-2}(4\pi)^{-2}\Delta^{\frac{1}{2}}(x,x')\exp\left(-\mathrm{i}m^2s+\frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right)F(x,x';\mathrm{i}s),$$

得

$$\tilde{\zeta}(\nu) = \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2\Gamma(\nu)}\int\sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^4x\int_0^\infty(\mathrm{i}s)^{\nu-3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2s}F(x,x;\mathrm{i}s)\mathrm{i}\mathrm{d}s。 \tag{6.2.14}$$

如果 $\mathrm{Re}(\nu) > 2$，注意 m^2 实际上是 $m^2 - \mathrm{i}\epsilon$，则边界项为零，在三次分部积分后，得到

$$\tilde{\zeta}(\nu) = \frac{-\mathrm{i}}{(4\pi)^2\Gamma(\nu+1)(\nu-1)(\nu-2)} \times \int \sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^4x \int_0^\infty (\mathrm{i}s)^\nu \frac{\partial^3}{\partial(\mathrm{i}s)^3}[F(x,x;\mathrm{i}s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2s}]\mathrm{i}\mathrm{d}s, \tag{6.2.15}$$

这里已经用了

$$\nu\Gamma(\nu) = \Gamma(\nu+1)。$$

因此，

$$\tilde{\zeta}(0) = \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\int \sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^4x \left[\frac{1}{2}m^4a_0 - m^2a_1(x) + a_2(x)\right]。 \tag{6.2.16}$$

上面的结果表明，有效作用量 Γ 中的 $\tilde{\zeta}(0)\ln\mu^2$ 只贡献一个有限的常数，它不会影响场方程，可以被忽略。微分上面的 $\tilde{\zeta}(\nu)$ 的展开式(6.2.15)，可得

$$\tilde{\zeta}'(0) = \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\left\{(\gamma + \frac{3}{2})\int \sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^4x \left[\frac{1}{2}m^4 - m^2a_1(x) + a_2(x)\right] - \frac{1}{2}\int \sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^4x \int_0^\infty \ln(\mathrm{i}s)\frac{\partial^3}{\partial(\mathrm{i}s)^3}\left[F(x,x';\mathrm{i}s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2s}\right]\mathrm{i}\mathrm{d}s\right\}, \tag{6.2.17}$$

此处用了

$$\psi(\nu+1) \equiv \frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} = -\gamma + \sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\nu+n}\right)$$

和 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}(\mathrm{i}s)^\nu = (\mathrm{i}s)^\nu\ln(\mathrm{i}s)$。第一项是一个常数，如前，可以忽略，仅保留第二项，可得

$$\mathscr{L}_{\mathrm{ren}} = -\frac{1}{64\pi^2}\int_0^\infty \ln(\mathrm{i}s)\frac{\partial^3}{\partial(\mathrm{i}s)^3}\left[F(x,x';\mathrm{i}s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2s}\right]\mathrm{i}\mathrm{d}s。$$

这与维数重正化的结果式 (6.1.25) 一致。

6.3 点分离正规化 (协变测地点分离)

在 5.3 节已知，4 维单圈有效拉氏量由

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \lim_{x\to x'}\frac{\Delta^{1/2}(x,x')}{32\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{i}\mathrm{d}s}{(\mathrm{i}s)^3}\exp\left(-\mathrm{i}m^2s + \frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right)F(x,x';s) \tag{6.3.1}$$

给出，其发散部分为

$$\mathscr{L}_{\text{div}} = \lim_{x\to x'} \frac{\Delta^{1/2}(x,x')}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{i}\mathrm{d}s}{(\mathrm{i}s)^3} \exp\left(-\mathrm{i}m^2 s + \frac{\sigma}{2\mathrm{i}s}\right) \Big[a_0(x,x') + a_1(x,x')(\mathrm{i}s) + a_2(x,x')(\mathrm{i}s)^2\Big], \tag{6.3.2}$$

仿 5.2 节，作变量代换

$$z^2 = 2m^2\sigma, \qquad u = \frac{-2\mathrm{i}m^2 s}{z}, \tag{5.2.32}$$

则有效拉氏量的发散部分可写为

$$\mathscr{L}_{\text{div}} = -\lim_{x\to x'} \frac{\mathrm{i}\Delta^{1/2}(x,x')}{32\pi} \bigg\{ \frac{2m^2}{\sigma} a_0(x,x') \mathrm{H}_2^{(2)}\left[(2m^2\sigma)^{1/2}\right] - \frac{\sqrt{2}m}{\sigma^{1/2}} a_1(x,x') \mathrm{H}_1^{(2)}\left[(2m^2\sigma)^{1/2}\right] + a_2(x,x') \mathrm{H}_0^{(2)}\left[(2m^2\sigma)^{1/2}\right] \bigg\}, \tag{6.3.3}$$

其中，$\mathrm{H}_\nu^{(2)}$ 是 ν 阶第二类汉克尔函数。把汉克尔函数作为 σ 的级数在 $\sigma=0$ 展开[44]，则

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}_\nu^{(2)}[(2m^2\sigma)^{1/2}] \\
\equiv&\, \mathrm{J}_\nu[(2m^2\sigma)^{1/2}] - \mathrm{i}Y_\nu[(2m^2\sigma)^{1/2}] \\
=&\, \frac{\mathrm{i}}{\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{m\sigma^{1/2}}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-k-1)!}{k!}\left(\frac{m^2\sigma}{2}\right)^k \\
&+ \left[1 - \frac{\mathrm{i}}{\pi}\ln\left(\frac{m^2\sigma}{2}\right)\right]\left(\frac{m\sigma^{1/2}}{\sqrt{2}}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-m^2\sigma/2)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \\
&+ \frac{\mathrm{i}}{\pi}\left(\frac{m\sigma^{1/2}}{\sqrt{2}}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \left[\psi(k+1) + \psi(\nu+k+1)\right] \frac{(-m^2\sigma/2)^k}{k!(\nu+k)!},
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

将式 (6.3.4) 代入 $\mathscr{L}_{\text{div}}$ 的表达式，保留在 $\sigma\to 0$ 时的非零项，略去虚部的项，可得如下结果：

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\text{div}} =&\, \lim_{x\to x'} \frac{\Delta^{1/2}(x,x')}{8\pi^2} \\
&\times \bigg\{ a_0(x,x')\left[\sigma^{-2} - \frac{1}{2}m^2\sigma^{-1} - \frac{1}{4}m^4\left(\gamma + \frac{1}{2}\ln|\frac{1}{2}m^2\sigma|\right) + \frac{3}{16}m^4\right] \\
&+ a_1(x,x')\left[-\frac{1}{2}\sigma^{-1} + \frac{1}{2}m^2\left(\gamma + \frac{1}{2}\ln|\frac{1}{2}m^2\sigma|\right) - \frac{1}{4}m^2\right] \\
&- \frac{1}{2}a_2(x,x')\left[\gamma + \frac{1}{2}\ln|\frac{1}{2}m^2\sigma|\right]\bigg\}。
\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

对于一般的场，并把 a_0、a_1 和 a_2 展开，可得[38]

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{div}} = \frac{1}{8\pi^2}\Bigg\{ &\frac{C_1(\bar{s})}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma}\left[C_2(\bar{s})m^2 + C_3(\bar{s})R + C_4(\bar{s})R_{\lambda\xi}\frac{\sigma^\lambda\sigma^\xi}{\sigma}\right] \\ &+\Big[C_5(\bar{s})m^4 + C_6(\bar{s})m^2R + C_7(\bar{s})R^{\lambda\xi\kappa\iota}R_{\lambda\xi\kappa\iota} \\ &+C_8(\bar{s})R^{\lambda\xi}R_{\lambda\xi} + C_9(\bar{s})R^2 - C_{10}(\bar{s})\Box R\Big]\left(\gamma + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{2}m^2\sigma\right|\right) \\ &+\Bigg[C_{11}(\bar{s})m^4 + C_{12}(\bar{s})m^2R + C_{13}(\bar{s})m^2R_{\lambda\xi}\frac{\sigma^\lambda\sigma^\xi}{\sigma} \\ &+C_{14}(\bar{s})\left(\frac{1}{288}R_{\lambda\xi}R_{\kappa\iota} + \frac{1}{360}R^{\rho}{}_{\lambda}{}^{\tau}{}_{\xi}R_{\rho\kappa\tau\iota} + \frac{1}{80}R_{\lambda\xi;\kappa\iota}\right)\frac{\sigma^\lambda\sigma^\xi\sigma^\kappa\sigma^\iota}{\sigma^2} \\ &+C_{15}(\bar{s})\left(-\frac{1}{180}R_{\lambda\rho}R^{\rho}{}_{\xi} + \frac{1}{360}R^{\rho\tau}R_{\rho\lambda\tau\xi} - \frac{1}{240}\Box R_{\lambda\xi}\right) \\ &+C_{16}(\bar{s})R^{\rho\tau\kappa}{}_{\lambda}R_{\rho\tau\kappa\xi} + C_{17}(\bar{s})R_{;\lambda\xi}\Bigg]\frac{\sigma^\lambda\sigma^\xi}{\sigma}\Bigg\},\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

其中，常数 C_n 是自旋 $\bar{s}$ 的函数，

$$\sigma^\alpha \equiv \sigma^{;\alpha}, \qquad \sigma = \frac{1}{2}\sigma_\alpha\sigma^\alpha。$$

点分离方法的主要优点之一是：不像维数正规化那样，即不需要知道比 4 维更高的模函数。然而，此优点也是造成上面方程中的 $\mathscr{L}_{\text{div}}$ 形式复杂的原因。

令

$$\sigma^\mu = \epsilon t^\mu, \tag{6.3.7}$$

其中，ϵ 是 x 与 x' 间测地线的长度 (非类光测地线图 6.1)，那么

$$t^\mu t_\mu = \pm 1 \equiv \varSigma, \tag{6.3.8}$$

所以在此参数化中有

$$\sigma = \frac{1}{2}\epsilon^2\varSigma, \tag{6.3.9}$$

可见，$\mathscr{L}_{\text{div}}$ 中主要的发散项是 ϵ^{-4} 阶的，而且一般来说存在方向依赖的项，如

$$R_{\mu\nu}R_{\rho\sigma}t^\mu t^\nu t^\rho t^\sigma, \tag{6.3.10}$$

这样的项不能用重整化方式吸收掉，为消除方向依赖的项需对所有方向取平均[45]，即

$$\begin{aligned}\langle\sigma^\mu\sigma^\nu\rangle_{\text{平均}} &= \frac{1}{2}\sigma g^{\mu\nu} \\ \langle\sigma^\mu\sigma^\nu\sigma^\lambda\sigma^\delta\rangle_{\text{平均}} &= \frac{1}{6}\sigma^2(g^{\mu\nu}g^{\lambda\delta} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\delta} + g^{\mu\delta}g^{\nu\lambda})。\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

采用这种平均后，可把正规化参数从 4 个 σ^μ 约化到 1 个 σ，并在 $\bar{\mathscr{L}}_g = \mathscr{L}_g + \mathscr{L}_{\text{div}}$ 中得到用 R、R^2、$R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$、$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 等不依赖于方向的项组成的表达式。利用推广的高斯–博内定理，它们可以被吸收到耦合常数 Λ、G、a、b 中去。于是，我们能够得到与以前完全相同的 $\bar{\mathscr{L}}_g$，所以点分离法和维数正规化方法是相同的。

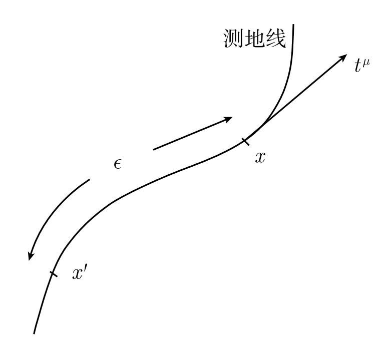


图 6.1　非类光测地线

小结：真空物质场的单圈涨落有效拉格朗日量 (或作用量) 的正规化与重整化是以费曼格林函数的小距离 (高频) 展开 $G_F^{DS}(x,x')$ 为基础的。表 6.1 给出三种正规化方案的比较。

表 6.1　三种正规化方案的比较

	维数正规化 $x=x', n\neq 4$	ζ 函数正规化 $x=x', n=4$	点分离正规化 $x\neq x', n=4$
正规化参数	n	$\tilde{\zeta}(\nu)$ 的 ν	$\sigma^\mu=\epsilon t^\mu$ 的 ϵ
正规化	当$n\to 4$, 协变分离 $\mathscr{L}_{\text{eff}}=\mathscr{L}_g+\mathscr{L}_m^{1-\text{loop}}$ $=(\mathscr{L}_g+\mathscr{L}_{\text{div}})+\mathscr{L}_{\text{ren}}$ $=\bar{\mathscr{L}}_g+\mathscr{L}_{\text{ren}}$	当$\nu\to 0$ $\Gamma=\lim\limits_{\nu\to 0}\Big\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\mu^{2\nu}$ $\times\big[\tilde{\zeta}'(\nu)+\ln\mu^2\tilde{\zeta}(\nu)\big]\Big\}$	当$\epsilon\to 0$, 协变分离 $\mathscr{L}_{\text{eff}}=\mathscr{L}_g+\mathscr{L}_m^{1-\text{loop}}$ $=(\mathscr{L}_g+\mathscr{L}_{\text{div}})+\mathscr{L}_{\text{ren}}$ $=\bar{\mathscr{L}}_g+\mathscr{L}_{\text{ren}}$
重整化	引进抵消项或 重整化常数	−	引进抵消项或 重整化常数

第 7 章　物质场能动张量的计算与共形反常

在这一章中，我们将集中研究物质场重整化能动张量的计算问题。我们拟从平直时空中的卡西米尔 (Casimir) 效应入手，并由此展开对弯曲时空中物质场重整化能动张量计算问题的讨论。

7.1　卡西米尔效应

我们希望讨论时空几何及其边界对能动张量的影响。然而，即使时空本身是平直的且无边界，物质边界的存在仍然可能对量子理论给出限制，这提供了在实验室里检测弯曲时空量子场论中某些几何效应的上佳机会。

7.1.1　一种简单情况

假定在无边界的 4 维闵可夫斯基时空中，有一张无限大平面位于 $x^3=0$ 处，无质量标量场在 $x^3=0$ 处满足狄利克雷 (Dirichlet) 边界条件，即

$$\phi(x)|_{x^3=0}=0, \tag{7.1.1}$$

考虑到场在边界处的反射，无边界情况的模函数

$$u_{\boldsymbol{k}}(t,\boldsymbol{x})\sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\omega t} \tag{7.1.2}$$

将变为有边界情况的模函数

$$u_{\boldsymbol{k}}(t,\boldsymbol{x})\sim \sin(|k_3|x^3)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1x^1+\mathrm{i}k_2x^2-\mathrm{i}\omega t}。 \tag{7.1.3}$$

这时，阿达玛基本函数

$$\begin{aligned}D^{(1)}(x,x')&=-\frac{1}{4\pi^2\sigma}=-\frac{1}{2\pi^2}\left[(t-t')^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')^2\right]^{-1}\\&=\langle 0|\{\phi(x),\phi(x')\}|0\rangle=D^{(+)}(x,x')+D^{(-)}(x,x')\end{aligned} \tag{7.1.4}$$

被如下形式的格林函数取代，

$$\begin{aligned}D^{(1)}_{\mathrm{B}}(x,x')=\frac{1}{2\pi^2}\Bigg[&\frac{1}{(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3-x'^3)^2-(t-t')^2}\\&-\frac{1}{(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3+x'^3)^2-(t-t')^2}\Bigg],\end{aligned} \tag{7.1.5}$$

其中

$$\sigma \equiv \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(x^\mu - x'^\mu)(x^\nu - x'^\nu)。\tag{7.1.6}$$

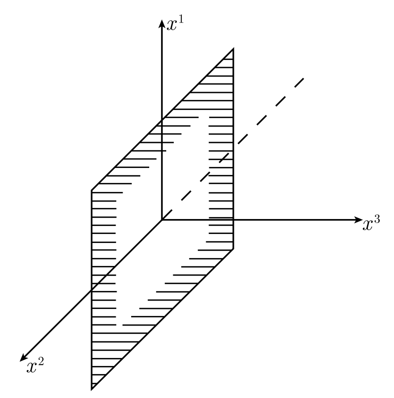


图 7.1　无限大静止平面边界

式 (7.1.6) 可用镜像法和满足边界条件

$$D_{\mathrm{B}}^{(1)}(x,x')|_{x^3=0 \text{ 或 } x'^3=0} = 0 \tag{7.1.7}$$

的要求得到。式 (7.1.5) 的第一项恰为无边界闵可夫斯基时空中的格林函数，当 $x \to x'$ 时它是二次发散的。对其微分得到能动张量的表达式 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ 也是二次发散的表达式，边界效应可以从 $D_{\mathrm{B}}^{(1)}(x,x')$ 减去 $D^{(1)}(x,x')$ 算出。

注意到

$$T_{\alpha\beta} = \phi_{,\alpha}\,\phi_{,\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\lambda\delta}\phi_{,\lambda}\,\phi_{,\delta}\,, \tag{7.1.8}$$

$$T_{tt} = \frac{1}{2}\left[(\phi_{,t})^2 + \delta^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}\right], \tag{7.1.9}$$

及

$$D^{(1)}(x,x') = \langle 0|\{\phi(x),\phi(x')\}|0\rangle, \tag{7.1.10}$$

记 $\dfrac{\partial}{\partial x'^i} = \partial'_i$，我们有

$$\begin{aligned}
\langle 0|T_{tt}|0\rangle &= \frac{1}{4}\lim_{x'\to x}\left(\partial_t\partial_{t'} + \delta^{ij}\partial_i\partial'_j\right)D^{(1)}(x,x') \\
&= \frac{1}{4}\lim_{x'\to x}\langle 0|\partial_t\phi(x)\partial_{t'}\phi(x') + \delta^{ij}\partial_i\phi(x)\partial'_j\phi(x') + \partial_{t'}\phi(x')\partial_t\phi(x) \\
&\quad + \delta^{ij}\partial'_i\phi(x')\partial_j\phi(x)|0\rangle \\
&= \frac{1}{4}\lim_{x'\to x}\sum_{\boldsymbol{k}}\left(u_{\boldsymbol{k},t}u^*_{\boldsymbol{k},t'} + u^*_{\boldsymbol{k},t}u_{\boldsymbol{k},t'} + \delta^{ij}\partial_i u_{\boldsymbol{k}}\partial'_j u^*_{\boldsymbol{k}} + \delta^{ij}\partial_i u^*_{\boldsymbol{k}}\partial'_j u_{\boldsymbol{k}}\right) \\
&\propto \sum_{\boldsymbol{k}}\omega_k^2,
\end{aligned} \tag{7.1.11}$$

所以，能动张量中的边界效应就是

$$\begin{aligned}
\langle 0|T_{tt}|0\rangle_{\mathrm{B}} &= \frac{1}{4}\lim_{x'\to x}\left(\partial_t\partial_{t'} + \delta^{ij}\partial_i\partial'_j\right)\left[D_B^{(1)}(x,x') - D^{(1)}(x,x')\right] \\
&= -\frac{1}{8\pi^2}\lim_{x'\to x}(\partial_{t'}\partial_t + \partial'_1\partial_1 + \partial'_2\partial_2 + \partial'_3\partial_3)\cdot \\
&\quad \frac{1}{(x^1-x'^1)^2 + (x^2-x'^2)^2 + (x^3+x'^3)^2 - (t-t')^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi^2}\lim_{x'\to x}\frac{(x^3+x'^3)^2-\left[(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(t-t')^2\right]}{\left[(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3+x'^3)^2-(t-t')^2\right]^3} \\
&= -\frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{(x^3)^4}<0。
\end{aligned} \tag{7.1.12}
$$

类似地有

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|T_{11}|0\rangle_{\mathrm{B}}=\langle 0|T_{22}|0\rangle_{\mathrm{B}}=\frac{1}{16\pi^2(x^3)^4}, \\
&\langle 0|T_{33}|0\rangle_{\mathrm{B}}=\langle 0|T_{ij}|0\rangle_{\mathrm{B}}=\langle 0|T_{it}|0\rangle_{\mathrm{B}}=0 \qquad (i\neq j)。
\end{aligned} \tag{7.1.13}
$$

下面对式 (7.1.12) 进行讨论。

(1) 正如所预期的，当 $x^3\to\infty$ 时，$\langle T_{tt}\rangle_{\mathrm{B}}\to 0$，即此时边界效应可以忽略。

(2) $\langle T_{tt}\rangle_{\mathrm{B}}<0$。此结果破坏了弱能量条件 (weak energy condition，WEC)。在经典广义相对论中，弱能量条件要求对任何非类空矢量 v^μ，有 $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu\geqslant 0$，而破坏弱能量条件的物质常被称为奇异物质。于是，我们看到，边界条件可以从真空中产生等效的奇异物质。

(3) 当 $x^3\to 0^-$ 时，$\langle T_{tt}\rangle\to\infty$。这就是说，虽然重整化能消除边界之外的每一点的发散，但是在边界上仍保有 $(x^3)^{-4}$ 量级的发散。式 (7.1.12) 对 x^3 方向积分即可得单位边界面积上的真空能量。很显然，即使我们已经减去了无边界闵可夫斯基时空的无穷大真空能面密度，单位面积上的真空能依然是发散的。

事实上，只要狄利克雷边界条件成立，此种类型的发散对于任意的弯曲边界均存在。现在，让我们一般性地研究 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{B}}$ 的发散性。设在 $x^3=0$ 处有一个平面边界，考虑对称性，张量 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{B}}$ 只能由 $\eta_{\mu\nu}$ 和$n_\mu n_\nu$ 构成，这里 $n_\mu=\eta_{\mu\nu}n^\nu$，n^μ 是此边界的单位法矢量，而且张量 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{B}}$ 只能是 x^3 的函数，因此有

$$
\langle 0|T^{\mu\nu}|0\rangle_B=f(x^3)\eta^{\mu\nu}+g(x^3)n^\mu n^\nu。 \tag{7.1.14}
$$

利用平直空间中的协变守恒条件

$$
\partial_\mu\langle 0|T^{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{B}}=0, \tag{7.1.15}
$$

有

$$
f_{,\mu}\,\eta^{\mu\nu}+g_{,\mu}\,n^\mu n^\nu=0, \tag{7.1.16}
$$

同乘 n_ν，可得

$$
f'-g'=0, \tag{7.1.17}
$$

所以

$$
f(x^3)=g(x^3)+\alpha, \tag{7.1.18}
$$

其中，α 是一个常数。式 (7.1.14) 可写成

$$\langle 0|T^{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{B}} = g(x^3)(\eta^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu) + \alpha\eta^{\mu\nu}。 \tag{7.1.19}$$

其迹为

$$\langle 0|T^{\mu}_{\ \mu}|0\rangle_{\mathrm{B}} = 3g(x^3) + 4\alpha。 \tag{7.1.20}$$

假如能动张量是无迹的，从式 (7.1.20) 可得

$$g(x^3) = -\frac{4}{3}\alpha。 \tag{7.1.21}$$

对于平直时空，远离边界处的重整化真空能动张量应该是零，所以 $\alpha = 0$。这意味着，在无迹情况下，重整化的真空能动张量等于零①。此结果对于电磁场和外尔 (Weyl) 场都是对的，但对于 $T_{\mu\nu}$ 如式 (7.1.8) 所示的无质量标量场则不然。对于平直时空中的共形不变标量场，改进过的新 $T_{\mu\nu}$ 不同于式 (7.1.8)，而是由下式给出，即

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{3}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}\eta^{\sigma\rho}\phi_{,\sigma}\phi_{,\rho} - \frac{1}{3}\phi\phi_{;\mu\nu} + \frac{1}{12}\eta_{\mu\nu}\phi\Box\phi, \tag{7.1.22}$$

它显然满足

$$T^{\mu}_{\mu} = \frac{2}{3}\phi^{,\mu}\phi_{,\mu} - \frac{2}{3}\phi^{,\sigma}\phi_{,\sigma} - \frac{1}{3}\phi\phi_{;\mu}{}^{\mu} + \frac{1}{3}\phi\Box\phi = 0。 \tag{7.1.23}$$

因而对于共形不变标量场，$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{B}}$ 在平面边界附近也等于零。

然而，如果边界是弯曲的，平面边界的特殊对称性被破坏，$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{B}}$ 的行为将是怎样的呢？对于共形不变场，可以证明在任意弯曲边界的邻近处均有[46, 47]

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{B}} \propto \epsilon^{-3}\chi_{\mu\nu} + O(\epsilon^{-2}), \tag{7.1.24}$$

其中，ϵ 是离边界的距离，$\chi_{\mu\nu}$ 是边界的第二基本形式。这就意味着，只要平面边界的特殊对称性被破坏，$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{B}}$ 在边界处就将发散，与 T^{μ}_{μ} 是否等于零无关。由于在实验室中不可能做出绝对的平面边界，任何边界都带有一定的曲率，这一结果似乎意味着，在实验中很容易发现这种发散效应，然而事实并非如此。这主要是因为，我们在计算中用的是理想的狄利克雷边界条件，而实验中，物质边界不可能实现这种理想的狄利克雷边界条件，对于真实的物质边界，甚高频模会透射进入物质内部，从而对量子场提供一个紫外截断，阻止了发散的出现。尽管如此，这种边界效应仍是物理的，即在边界附近，量子场的重整化能动张量有较明显的增加，它们有可能在实验中得到证实[46]。

① 这是假定不出现量子反常情况下得到的结果。所谓量子反常是指，在经典框架下具有一定的对称性，量子化后相应的重整化量不具有这种对称性了。有关量子反常 (特别是共形反常) 的进一步介绍见 7.2 节。

7.1.2 两个无穷大平行反射面之间的真空能量

如图 7.2 所示，在 $x^3=0$ 和 $x^3=a$ 处置两平行的无穷大反射面。此时，只有圆频率是 π/a 整数倍的模才能存在于两个平行板之间。这相当于空间在 x^3 方向有一个周期为 $2a$ 的周期性条件。在此空间中，(t,x^1,x^2,x^3) 和 $(t,x^1,x^2,2a-x^3)$ 对应的实际是同一点。

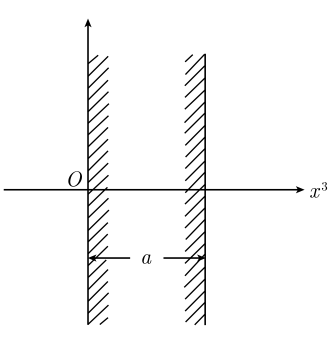


图 7.2 两个无穷大平行反射面之间的真空能量

对于共形不变标量场，从 $\langle T^{\mu\nu}\rangle_{\mathrm{B};\nu}=0$(协变守恒)、$\langle T^{\mu}_{\ \mu}\rangle_{\mathrm{B}}=0$(无迹) 和平面对称性可得

$$\langle T^{\mu\nu}\rangle_{\mathrm{B}}=A\left(\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}+n^{\mu}n^{\nu}\right)。\tag{7.1.25}$$

对于两个无穷大平行反射面之间的标量场，阿达玛基本函数为

$$\begin{aligned}D^{(1)}_{\mathrm{B}}(x,x')&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}D^{(1)}_{n,\mathrm{B}}(x,x')\\&=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3-x'^3-2an)^2-(t-t')^2}\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3+x'^3-2an)^2-(t-t')^2}\right],\end{aligned}\tag{7.1.26}$$

在 $x^3=0$ 或 ${x'}^3=0$ 处以及 $x^3=a$ 或 ${x'}^3=a$ 处，式 (7.1.26) 为零。仿第 7.1.1 节，

$$\begin{aligned}\langle 0|T_{tt}|0\rangle_{\mathrm{B}}=&\frac{1}{2}\lim_{x'\to x}\left(\frac{2}{3}\partial_t\partial_{t'}-\frac{1}{6}\eta^{\sigma\rho}\partial_\sigma\partial'_\rho-\frac{1}{3}\partial_t\partial_t+\frac{1}{12}\partial^\lambda\partial_\lambda\right)\\&\left\{D^{(1)}_{\mathrm{B}}(x,x')-\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3-x'^3)^2-(t-t')^2}\right.\\&\left.+\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3+x'^3-2a)^2-(t-t')^2}\right\},\end{aligned}\tag{7.1.27}$$

这里，当 $(t,x^1,x^2,x^3)\to(t',x'^1,x'^2,x'^3)$ 或 $(t,x^1,x^2,x^3)\to(t',x'^1,x'^2,2a-x'^3)$ 时，$\langle 0|T_{tt}|0\rangle_{\mathrm{B}}$ 的无穷大真空能量发散，已通过两个减除项而消除。对 $D^{(1)}_{\mathrm{B}}$ 中的第二项重新定义 n 后，等价于在 $D^{(1)}_{\mathrm{B}}$ 中简单地丢掉 $n=0$ 的项 $D^{(1)}_{0,\mathrm{B}}(x,x')$，以消除真空能量发散。于是，有

$$\begin{aligned}&\langle 0|T_{tt}|0\rangle_{\mathrm{B}}\\&=\frac{1}{8\pi^2}\lim_{x'\to x}\left[\partial_t\partial_{t'}+\frac{1}{3}(\partial_1\partial'_1+\partial_2\partial'_2+\partial_3\partial'_3)-\frac{1}{2}\partial_t^2-\frac{1}{6}(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)\right]\end{aligned}$$

$$\sum_{n\neq 0,-\infty}^{+\infty}\left\{\left[(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3-x'^3-2an)^2-(t-t')^2\right]^{-1}\right.$$
$$\left.-\left[(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3+x'^3-2an)^2-(t-t')^2\right]^{-1}\right\}$$
$$\equiv\frac{1}{8\pi^2}\lim_{x'\to x}\left[\partial_t\partial_{t'}+\frac{1}{3}(\partial_1\partial'_1+\partial_2\partial'_2+\partial_3\partial'_3)-\frac{1}{2}\partial_t^2-\frac{1}{6}(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)\right]$$
$$\sum_{n\neq 0}(A_n-B_n). \tag{7.1.28}$$

由于

$$\lim_{x'\to x}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}A_n=\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2 A_n}{(\partial x^1)^2}=\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2 A_n}{(\partial x^2)^2}=-\frac{2}{(2an)^4},$$
$$\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2 A_n}{\partial t^2}=\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2 A_n}{\partial x^1\partial x'^1}=\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2 A_n}{\partial x^2\partial x'^2}=\frac{2}{(2an)^4},$$
$$\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2 A_n}{\partial x^3\partial x'^3}=\frac{2}{(2an)^4}-\frac{8}{(2an)^4}=-\frac{6}{(2an)^4},$$
$$\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2 A_n}{(\partial x^3)^2}=-\frac{2}{(2an)^4}+\frac{8}{(2an)^4}=\frac{6}{(2an)^4}, \tag{7.1.29}$$
$$\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2 B_n}{\partial t\partial t'}=\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2 B_n}{(\partial x^1)^2}=\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2 B_n}{(\partial x^2)^2}=-\frac{2}{(2x^3-2an)^4},$$
$$\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2 B_n}{\partial t^2}=\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2 B_n}{\partial x^1\partial x'^1}=\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2 B_n}{\partial x^2\partial x'^2}=\frac{2}{(2x^3-2an)^4},$$
$$\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2 B_n}{(\partial x^3)^2}=\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2 B_n}{\partial x^3\partial x'^3}=\frac{6}{(2x^3-2an)^4},$$

所以

$$\langle 0|T_{tt}|0\rangle_{\mathrm{B}}=\frac{1}{8\pi^2}\sum_{n\neq 0}\left[-\frac{8}{3}\frac{1}{(2an)^4}-\frac{4}{3}\frac{1}{(2an)^4}\right]$$
$$=-\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{(2a)^4}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^4}=-\frac{1}{16\pi^2a^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=-\frac{\pi^2}{1440a^4}, \tag{7.1.30}$$

最后一步用到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}。$$

类似的计算可得到能动张量的其他分量，其结果是

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{B}}=-\frac{\pi^2}{1440a^4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}。 \tag{7.1.31}$$

对于电磁场有

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{B}} = -\frac{\pi^2}{720a^4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}。 \tag{7.1.32}$$

考虑到电磁场有两个螺旋度，式 (7.1.32) 的系数是式 (7.1.31) 的 2 倍。注意此处度规号差为 -2, 所以上述结果不满足弱能量条件。

单位面积的电磁场能量是

$$E = -\frac{\pi^2}{720a^3} \text{ 或 } -\frac{\pi^2}{720a^3}\hbar c, \tag{7.1.33}$$

两块平行板之间每单位面积的吸引力是

$$F = -\frac{\partial E}{\partial a} = -\frac{\pi^2}{240a^4}。 \tag{7.1.34}$$

最初对卡西米尔效应的测量可追溯到 1957 年[48, 49]，20 世纪末，拉默洛克斯 (Lamoreaux) 以及毛希丁 (Mohideen) 和罗伊 (Roy) 以较高的精度测出了这个力[50, 51]。

7.1.3 两块斜面所夹楔形中的真空能

可以证明，如图 7.3 所示的两块斜面所夹楔形中的真空能动张量是[52, 46]：

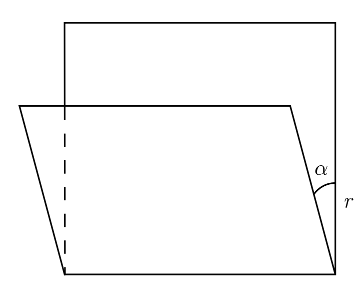


图 7.3 两个斜面间的楔形

对标量场，有

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{ren}} = \frac{1}{1440r^4\alpha^2}\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.1.35}$$

对电磁场，有

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{720r^4\alpha^2}\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2}+11\right)\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2}-1\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.1.36}$$

式中，α 是楔形的夹角，r 是距楔形轴的距离。

7.1.4　$R^1 \times S^1$ 时空的卡西米尔能

图 7.4 是一个 2 维圆柱状的平直时空，其度规是

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2, \tag{7.1.37}$$

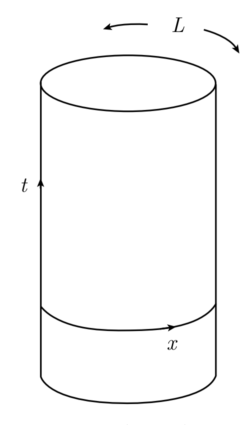


图 7.4　$R^1 \times S^1$ 时空

时空在 x 方向有 L 的周期性，即 x 与 $x+L$ 对应于空间的同一点。

对任意标量场

$$\phi(t,x) = \sum_k \left[a_k u_k(t,x) + a_k^\dagger u_k^*(t,x)\right], \tag{7.1.38}$$

其中

$$u_k(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2L\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} = u_k(t,x+L), \tag{7.1.39}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{L/n} = \frac{2\pi n}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots。 \tag{7.1.40}$$

当 $m=0$ 时，经典能动张量是

$$T_{tt} = T_{xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2, \tag{7.1.41}$$

$$T_{tx} = T_{xt} = \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

量子条件是

$$\left[a_k, a_{k'}^\dagger\right] = \delta_{kk'}。 \tag{7.1.42}$$

由于总能量

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}|k| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{2\pi|n|}{L}, \tag{7.1.43}$$

所以真空能密度为

$$\rho_v = \frac{E}{L} = \left(\frac{2\pi}{L^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty} n。 \tag{7.1.44}$$

它显然是一个发散的量。现在用 ζ 函数正规化方法来处理这个发散的求和。令

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \lim_{s\to -1}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \lim_{s\to -1}\zeta(s) = \zeta(-1)。 \tag{7.1.45}$$

因[44]

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12},$$

所以

$$\rho_{v,\mathrm{ren}} = \lim_{s\to -1}\left[\frac{2\pi}{L^2}\zeta(s)\right] = \frac{2\pi}{L^2}\zeta(-1) = -\frac{\pi}{6L^2} < 0, \tag{7.1.46}$$

若 $L\to\infty$，则 $\rho_{v,\mathrm{ren}}\to 0$。此结果清楚表明，$\rho_{v,\mathrm{ren}}\neq 0$ 来自边界条件或时空拓扑。

7.1.5 无限大平行反射面间的有限温度量子场

假如量子场不是处于真空态，而是处于有限温度 T 的状态，那么我们可以用温度格林函数取代式 (7.1.26) 和式 (7.1.27) 中的 $D_{\mathrm{B}}^{(1)}$，即用 $t-t'+\mathrm{i}m\beta$(其中 $\beta=(k_{\mathrm{B}}T)^{-1}$) 取代求和内第一项中 $t-t'$，并对从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的所有 m 求和，则

$$\begin{aligned}
&D_{B,\beta}^{(1)}(x,x')\\
&=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\\
&\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3-x'^3-2an)^2-(t-t'+\mathrm{i}m\beta)^2}\right.\\
&\left.-\frac{1}{(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3+x'^3-2an)^2-(t-t')^2}\right],
\end{aligned} \tag{7.1.47}$$

所以，两块无穷大平面间的能量密度为

$$\begin{aligned}
&\langle\beta|T_{00}|\beta\rangle_{\mathrm{B}}\\
&=\frac{1}{8\pi^2}\lim_{x'\to x}\left\{\partial_t\partial_{t'}+\frac{1}{3}(\partial_1\partial_1'+\partial_2\partial_2'+\partial_3\partial_3')-\frac{1}{2}\left[\partial_t^2+\frac{1}{3}(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)\right]\right\}\\
&\left\{\sum_n\left[\sum_m\frac{1}{(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3-x'^3-2an)^2-(t-t'+\mathrm{i}m\beta)^2}\right.\right.\\
&\left.-\frac{1}{(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3+x'^3-2an)^2-(t-t')^2}\right]\\
&-\frac{1}{(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3-x'^3)^2-(t-t')^2}\\
&\left.+\frac{1}{(x^1-x'^1)^2+(x^2-x'^2)^2+(x^3+x'^3-2a)^2-(t-t')^2}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{8\pi^2} \lim_{x' \to x} \left\{ \partial_t \partial_{t'} + \frac{1}{3}(\partial_1 \partial_1' + \partial_2 \partial_2' + \partial_3 \partial_3') - \frac{1}{2}\left[\partial_t^2 + \frac{1}{3}(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) \right] \right\} \\
&\quad \cdot \left[\sum_{\substack{n,m, \\ m=n\neq 0}} \frac{1}{(x^1 - x'^1)^2 + (x^2 - x'^2)^2 + (x^3 - x'^3 - 2an)^2 - (t - t' + \mathrm{i}m\beta)^2} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(x^1 - x'^1)^2 + (x^2 - x'^2)^2 + (x^3 + x'^3 - 2an)^2 - (t - t')^2} \right],
\end{aligned}
$$

在最后一步的后一项中已重新定义了 n，所以

$$
\begin{aligned}
&\langle \beta | T_{00} | \beta \rangle_{\mathrm{B}} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{n,m, \\ m=n\neq 0}} \left\{ \frac{3m^2\beta^2}{[(2an)^2 + m^2\beta^2]^3} - \frac{(2an)^2}{[(2an)^2 + m^2\beta^2]^3} \right\} \\
&= \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{6m^2\beta^2}{[(2an)^2 + m^2\beta^2]^3} - \frac{2(2an)^2}{[(2an)^2 + m^2\beta^2]^3} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3}{(m^2\beta^2)^2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2an)^4} \\
&= -k_{\mathrm{B}} T a^{-3} f'(\xi) + a^{-4} f(\xi) - \frac{\pi^2}{1440 a^4} + \frac{\pi^2}{30} (k_{\mathrm{B}} T)^4,
\end{aligned} \tag{7.1.48}
$$

其中

$$
f(\xi) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2\xi)^4}{(m^2 + 4\xi^2 n^2)^2}, \quad \xi = k_{\mathrm{B}} a T = a/\beta。 \tag{7.1.49}
$$

我们有下面的计算

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[n^2 + \left(m/2\xi \right)^2 \right]^2} &= \frac{\xi}{2} \left(\frac{2\xi}{m} \right)^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \left(m/2\xi \right)^2} \right]' \\
&= -\frac{\xi}{2} \left(\frac{2\xi}{m} \right)^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{-n^2\pi^2 - \left(\pi m/2\xi \right)^2} \right]' \\
&= \frac{\mathrm{i}\pi}{4} \left(\frac{2\xi}{m} \right)^3 \left[\xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mathrm{i}\pi m/2\xi}{\left(\mathrm{i}\pi m/2\xi \right)^2 - n^2\pi^2} \right]' \\
&= \frac{\mathrm{i}\pi}{4} \left(\frac{2\xi}{m} \right)^3 \left[\xi \left(\cot \frac{\mathrm{i}\pi m}{2\xi} - \frac{2\xi}{\mathrm{i}\pi m} \right) \right]' \\
&= \frac{\pi}{4} \left(\frac{2\xi}{m} \right)^3 \left[\xi \coth \frac{\pi m}{2\xi} - \frac{2\xi^2}{\pi m} \right]' \\
&= \frac{2\pi\xi^3}{m^3} \coth \frac{\pi m}{2\xi} + \frac{\pi^2\xi^2}{m^2} \sinh^{-2} \frac{\pi m}{2\xi} - 8 \left(\frac{\xi}{m} \right)^4,
\end{aligned} \tag{7.1.50}
$$

其中，“′” 是对 ξ 的微商，并且在第四个等式中已经用了公式

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}, \tag{7.1.51}$$

于是有

$$f(\xi) = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi\xi^3}{m^3} \coth \frac{\pi m}{2\xi} + \frac{\pi^2\xi^2}{m^2} \sinh^{-2} \frac{\pi m}{2\xi} - 8\left(\frac{\xi}{m}\right)^4 \right]。 \tag{7.1.52}$$

当 $\xi = k_{\mathrm{B}}aT \to 0$(低温) 时，

$$\begin{cases} \coth \dfrac{\pi m}{2\xi} = 1 + 2\exp\left(\dfrac{-\pi m}{\xi}\right) + O\left[\exp\left(\dfrac{-2\pi m}{\xi}\right)\right], \\ \operatorname{csch}^2 \dfrac{\pi m}{2\xi} = 4\exp\left(\dfrac{-\pi m}{\xi}\right) + O\left[\exp\left(\dfrac{-2\pi m}{\xi}\right)\right], \end{cases} \tag{7.1.53}$$

其中，$O\left[\exp\left(\dfrac{-2\pi m}{\xi}\right)\right]$ 表示 $\exp\left(\dfrac{-2\pi m}{\xi}\right)$ 及更高阶小量，

$$\begin{aligned} f(\xi) =& -\frac{1}{8\pi^2}\left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\pi\xi^3}{m^3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\pi\xi^3}{m^3} \exp\left(-\frac{\pi m}{\xi}\right)\right. \\ &\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\pi^2\xi^2}{m^2} \exp\left(-\frac{\pi m}{\xi}\right) - 8\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\xi}{m}\right)^4\right] + O\left[\exp\left(\frac{-2\pi m}{\xi}\right)\right] \\ =& -\frac{\xi^3}{4\pi}\zeta(3) + \frac{\pi^2}{90}\xi^4 - \left(\frac{\xi^3}{2\pi} + \frac{\xi^2}{2}\right)\exp\left(\frac{-\pi}{\xi}\right) + O\left[\exp\left(\frac{-2\pi}{\xi}\right)\right], \end{aligned} \tag{7.1.54}$$

$$f'(\xi) = -\frac{3\xi^2}{4\pi}\zeta(3) + \frac{2\pi^2}{45}\xi^3 - \left(\frac{3\xi^2}{2\pi} + \frac{3}{2}\xi + \frac{\pi}{2}\right)\exp\left(\frac{-\pi}{\xi}\right) + O\left[\exp\left(\frac{-2\pi}{\xi}\right)\right],$$

因此

$$\begin{aligned} \langle\beta|T_{00}|\beta\rangle_{\mathrm{B}} =& a^{-4}\left[f(\xi) - \xi f'(\xi)\right] - \frac{\pi^2}{1440a^2} + \frac{\pi^2}{30}(k_{\mathrm{B}}T)^4 \\ =& \frac{\zeta(3)}{2\pi a}(k_{\mathrm{B}}T)^3 - \frac{\pi^2}{1440a^4}。 \end{aligned} \tag{7.1.55}$$

式 (7.1.55) 给出温度对卡西米尔效应的修正。

当 $\xi = k_{\mathrm{B}}Ta \to \infty$(高温) 时，

$$\coth \frac{\pi m}{2\xi} = \frac{2\xi}{\pi m} + O\left(\frac{\pi m}{2\xi}\right),$$

$$\operatorname{csch}^2 \frac{\pi \mathrm{m}}{2\xi} = \frac{4\xi^2}{(\pi m)^2} + O(1), \tag{7.1.56}$$

$$f(\xi) = O(\xi^2), \qquad f'(\xi) = O(\xi),$$

所以

$$\langle\beta|T_{00}|\beta\rangle_{\mathrm{B}} = \frac{\pi^2}{30}(k_{\mathrm{B}}T)^4 + O[(k_{\mathrm{B}}T)^2], \tag{7.1.57}$$

恰是黑体辐射。

巴里安 (Balian) 和杜普兰田 (Duplantier) 已经研究了与球壳有关的卡西米尔自由能，还对更一般的几何进行了相当详细地研究[53, 54]。安比约恩 (Ambjørn) 和沃尔夫拉姆 (Wolfram) 也在一个长方形的盒子中推广了有质量标量场自由能的计算。此盒子在每个方向上都是有限大小的[55]。

7.1.6　运动边界的卡西米尔效应

对于 2 维两边都带镜子的情况，假定位于 $x=0$ 处的镜子保持静止，另一镜子在 $t=0$ 之前，静止于 $x=L$ 处，$t=0$ 时刻开始按 $z(t)$ 运动，则两镜子之间标量场的重整化能动张量为[22]

$$\begin{cases} \langle T_{tt}\rangle_{\mathrm{ren}} = \langle T_{xx}\rangle_{\mathrm{ren}} = \varLambda(u) + \varLambda(v), \\ \langle T_{tx}\rangle_{\mathrm{ren}} = \langle T_{xt}\rangle_{\mathrm{ren}} = \varLambda(v) - \varLambda(u), \end{cases} \tag{7.1.58}$$

其中

$$\varLambda \equiv -\frac{1}{24\pi}\left[\frac{R'''}{R'} - \frac{3}{2}\left(\frac{R''}{R'}\right)^2 + \pi^2\frac{(R')^2}{2L^2}\right], \tag{7.1.59}$$

R 由下式定义：

$$R[t+z(t)] = R[t-z(t)] + 2L。 \tag{7.1.60}$$

注意：式 (7.1.58) 表示右行和左行流的叠加，由于运动镜子产生的辐射被静止镜子反射，从而产生了这一现象。

7.2　共 形 反 常

考虑物质场经典作用量在共形变换下是不变的情况，即

$$\delta S_m(g) = S_m(\bar{g}) - S_m(g) = 0, \tag{7.2.1}$$

其中

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) = C^2(x)g_{\mu\nu}(x)。 \tag{7.2.2}$$

对于无穷小共形变换

$$\begin{aligned} &C(x) = 1 + \delta C(x), \\ &\delta g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = 2\delta C(x)g_{\mu\nu}(x), \\ &\delta g^{\mu\nu}(x) = -2\delta C(x)g^{\mu\nu}(x), \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

这里用了 $\delta(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu})=0$。用泛函微分

$$
\begin{aligned}
\delta S_m(g,\phi) &= \int \left[\frac{\delta S_m(g,\phi)}{\delta g^{\rho\sigma}(x)}\delta g^{\rho\sigma}(x)+\frac{\delta S_m(g,\phi)}{\delta\phi}\delta\phi\right]\mathrm{d}^n x \\
&= -\int 2\frac{\delta S_m(g,\phi)}{\delta g^{\rho\sigma}(x)}g^{\rho\sigma}(x)\delta C(x)\mathrm{d}^n x \\
&= -\int \sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^n x\left[\frac{2}{\sqrt{-g(x)}}\frac{\delta S_m(g,\phi)}{\delta g^{\rho\sigma}(x)}\right]g^{\rho\sigma}(x)\delta C(x) \\
&= -\int \sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^n x T_{\rho\sigma}g^{\rho\sigma}(x)\delta C(x) \\
&= -\int \sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^n x T^{\rho}_{\rho}\delta C(x),
\end{aligned}
\tag{7.2.4}
$$

此处已用了物质场方程

$$\frac{\delta S_m}{\delta\phi}=0。\tag{7.2.5}$$

因此，作用量泛函对 $C(y)$ 的变分导数给出

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\sqrt{-g(y)}}\frac{\delta S_m(g,\phi)}{\delta C(y)} &= \frac{1}{\sqrt{-g(y)}}\int\sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^n x T^{\rho}_{\rho}\frac{\delta C(x)}{\delta C(y)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g(y)}}\int\sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^n x T^{\rho}_{\rho}\delta^n(x-y) \\
&= T^{\rho}_{\rho}(y),
\end{aligned}
\tag{7.2.6}
$$

或

$$T^{\mu}_{\mu}(x)=-\frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\frac{\delta S_m(g,\phi)}{\delta C(x)}。\tag{7.2.7}$$

显然，如果 $S_m(g,\phi)$ 是共形不变的，则

$$T^{\mu}_{\mu}=0,\tag{7.2.8}$$

即经典共形不变物质场的能动张量是无迹的。下面给出几个典型的经典共形不变物质场及其在共形变换下的变换性质。

(1) 标量场。一般来说，标量场满足如下方程：

$$(\Box+m^2+\xi R)\phi(x)=0,\tag{7.2.9}$$

当 $m=0$，

$$\xi=\frac{1}{4}\frac{n-2}{n-1}\tag{4.3.6}$$

$\left(n=4\text{ 时}, \xi=\frac{1}{6}\right)$ 时，若 $\phi(x)$ 按如下形式变换：

$$\bar{\phi}(x)=C^{\frac{2-n}{2}}\phi(x),\tag{4.5.3}$$

则这个标量场是共形不变的。

(2) 电磁场 (矢量场)。

$$\Box A_\mu = 0, \qquad \partial_\nu A^\nu = 0, \tag{7.2.10}$$

$$\bar{A}_\mu = C^{\frac{2-n}{2}} A_\mu, \tag{7.2.11}$$

是共形不变的。

(3) 外尔旋量场。

$$e^\mu_{(\alpha)}\gamma^{(\alpha)}\psi_{;\mu} = 0, \tag{7.2.12}$$

其中，(α) 是洛伦兹指标，μ 是时空指标，$e^\mu_{(\alpha)}$ 为标架，$\gamma^{(\alpha)}$ 是狄拉克矩阵。当 ψ 在共形变换下按下述方式变换，则方程 (7.2.12) 是共形不变的：

$$\bar{\psi} = C^{\frac{1-n}{2}}\psi。 \tag{7.2.13}$$

需指出，在共形变换下，里奇张量按如下方式变换：

$$\bar{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (n-2)C(C^{-1})_{;\mu\nu} + g_{\mu\nu}\left[C^{-1}C_{;\lambda}{}^{\lambda} + (n-3)C^{-2}C_{;\lambda}C^{;\lambda}\right], \tag{7.2.14}$$

$$\bar{R} = C^{-2}R + 2(n-1)C^{-3}C_{;\lambda}{}^{\lambda} + (n-1)(n-4)C^{-4}C_{;\lambda}C^{;\lambda}, \tag{7.2.15}$$

所以，即使是真空爱因斯坦方程 $R_{\mu\nu} = 0$，也不是共形不变的。

现在考虑物质场有效拉氏量的 D-S 展开

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{eff}} &= \frac{1}{2}(4\pi)^{-n/2}\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4}\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)m^{4-2j}\Gamma\left(j-\frac{n}{2}\right) \\ &= \mathscr{L}_{\text{div}} + \mathscr{L}_{\text{ren}},\end{aligned} \tag{6.1.6}$$

相应的有效作用量和能动张量的迹分别是

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{eff}} &= \Gamma_{\text{div}} + \Gamma_{\text{ren}}, \\ \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta \mathit{\Gamma}_{\text{eff}}}{\delta g^{\mu\nu}}g^{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta \mathit{\Gamma}_{\text{div}}}{\delta g^{\mu\nu}}g^{\mu\nu} + \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta \mathit{\Gamma}_{\text{ren}}}{\delta g^{\mu\nu}}g^{\mu\nu},\end{aligned} \tag{7.2.16}$$

或

$$\langle T^\mu_\mu\rangle_{\text{eff}} = \langle T^\mu_\mu\rangle_{\text{div}} + \langle T^\mu_\mu\rangle_{\text{ren}}。 \tag{7.2.17}$$

在共形不变的情况，经典的 $T^\mu_\mu = 0$，所以 $\langle T^\mu_\mu\rangle_{\text{eff}} = 0$，则有

$$\langle T^\mu_\mu\rangle_{\text{ren}} = -\langle T^\mu_\mu\rangle_{\text{div}}。 \tag{7.2.18}$$

可见，虽然 $\mathit{\Gamma}_{\text{div}}$ 是发散的，$\langle T^\mu_\mu\rangle_{\text{div}}$ 不需要发散，实际上它是有限的，等于负的 $\langle T^\mu_\mu\rangle_{\text{ren}}$。

由式 (6.1.6) 易见，当 $n \to 4$ 且 $m \to 0$ 时，$\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 中所有 $j > 2$ 的项都是发散的。这些发散显然不同于由 $\mathscr{L}_{\text{div}}$ 所代表的紫外发散，事实上它们都是红外发散。有效拉氏量 D-S 展开的基本思想是把紫外发散部分 $\mathscr{L}_{\text{div}}$ 合理地分离出来，尽管所有 $j > 2$ 的项都存在红外发散，但这并不影响分离出 $\mathscr{L}_{\text{div}}$ 部分。下面我们集中讨论 $\mathscr{L}_{\text{div}}$ 部分。

显然，当 $n \to 4$, $m \to 0$ 时，$j = 0, 1$ 的项是零，仅有的、应该仔细研究的是 $j = 2$ 的项。

应用维数正规化方法，此项等于

$$\frac{1}{2}(4\pi)^{-n/2}\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4} a_2(x)\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right), \tag{7.2.19}$$

对于共形不变的标量场，则有

$$a_2(x) = \frac{1}{180}R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{180}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + \frac{1}{6}\left(\xi - \frac{1}{5}\right)\Box R + \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 R^2, \tag{5.2.24}$$

$$\xi \equiv \xi(n) = \frac{1}{4}\frac{n-2}{n-1}, \tag{4.3.6}$$

所以

$$\begin{aligned}
\Gamma_{j=2} &= \frac{1}{2}(4\pi)^{-n/2}(\frac{m}{\mu})^{n-4}\Gamma(2 - \frac{n}{2})\int\sqrt{-g}\mathrm{d}^n x a_2(x) \\
&= \frac{1}{2}(4\pi)^{-n/2}\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4}\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right)\int\sqrt{-g}\mathrm{d}^n x\,[\alpha F(x) + \beta G(x)] \\
&\quad + O(n-4),
\end{aligned} \tag{7.2.20}$$

其中

$$F = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 2R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + \frac{1}{3}R^2 \overset{(n=4)}{=\!=\!=} C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{7.2.21}$$

$$G = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R^2, \tag{7.2.22}$$

$$\alpha = \frac{1}{120}, \qquad \beta = -\frac{1}{360}。 \tag{7.2.23}$$

注意：

(1) 当 $n \to 4$ 时，

$$\int\sqrt{-g}G\mathrm{d}^4 x = \text{欧拉拓扑不变量}, \tag{7.2.24}$$

$$\int\sqrt{-g}F\mathrm{d}^4 x = \int\sqrt{-g}C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{d}^4 x, \tag{7.2.25}$$

二者都是共形不变的;

(2) 在 $\Gamma_{j=2}$ 的积分中，我们略去了 $\Box R$ 和 R^2 项，从高斯定理知，前者为零，后者是 $\frac{1}{2}\frac{(n-4)^2}{[12(n-1)]^2}R^2$，它在乘以 $\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\sim(4-n)^{-1}$ 之后，当 $n\to 4$ 时仍可以在 $\Gamma_{j=2}$ 中被略去;

(3) 当 $m\neq 0$ 且 $n\to 4$ 时，由式 (7.2.20) 给出的 $\Gamma_{j=2}$ 是发散的，虽然如此，它对能动张量的贡献在 $m\to 0$ 且 $n\to 4$ 时并不发散，这是因为

$$\begin{aligned}\langle T^{\mu}_{\mu}\rangle_{j=2} &= \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\Gamma_{j=2}}{\delta g^{\mu\nu}}g^{\mu\nu}\\ &= -\frac{1}{2}(4\pi)^{-n/2}\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4}(n-4)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\left[\alpha(F-\frac{2}{3}\Box R)+\beta G\right]\\ &\quad +O(n-4),\end{aligned} \tag{7.2.26}$$

这里已用了以下关系式，即

$$g^{\mu\nu}\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int\sqrt{-g}F\mathrm{d}^n x = -(n-4)\left(F-\frac{2}{3}\Box R\right), \tag{7.2.27}$$

$$g^{\mu\nu}\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int\sqrt{-g}G\mathrm{d}^n x = -(n-4)G, \tag{7.2.28}$$

其中，因子 $(n-4)$ 恰好抵消了 $\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)$ 中的因子 $(4-n)^{-1}$，所以在 $n\to 4$ 时，

$$\langle T_{\mu}{}^{\mu}\rangle_{j=2} = \frac{1}{16\pi^2}\left[\alpha\left(F-\frac{2}{3}\Box R\right)+\beta G\right]。 \tag{7.2.29}$$

总之，在 $n\to 4$，$m\to 0$ $(j=0,1,2)$ 的极限下，有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{div}} &= \mathscr{L}_{j=2},\\ \langle T_{\mu}{}^{\mu}\rangle_{\mathrm{div}} &= \langle T_{\mu}{}^{\mu}\rangle_{j=2},\\ \mathscr{L}_{\mathrm{ren}} &= \sum_{j>2}\mathscr{L}_j,\\ \langle T^{\mu}_{\mu}\rangle_{\mathrm{ren}} &= \sum_{j>2}\langle T_{\mu}{}^{\mu}\rangle_j。\end{aligned} \tag{7.2.30}$$

上述讨论说明，尽管有效拉氏量中所有 $j>2$ 的项都存在红外发散，然而它们的和所构成的 $\mathscr{L}_{\mathrm{ren}}$ 却可给出有限的重整化能动张量。由式 (7.2.18) 知

$$\langle T_{\mu}{}^{\mu}\rangle_{\mathrm{ren}} = -\langle T_{\mu}{}^{\mu}\rangle_{j=2}, \tag{7.2.31}$$

即

$$\begin{aligned}\langle T_{\mu}{}^{\mu}\rangle_{\mathrm{ren}} &= -\frac{1}{16\pi^2}\left[\alpha\left(F-\frac{2}{3}\Box R\right)+\beta G\right]\\ &= -\frac{a_2}{16\pi^2}\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2880\pi^2}\left(R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} - R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \Box R\right) \qquad (对标量场)$$
$$= -\frac{1}{2880\pi^2}\left(C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 - \Box R\right)。 \tag{7.2.32}$$

在一般情况下，有

$$\langle T_\mu{}^\mu\rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{2880\pi^2}\left[aC_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta} + b\left(R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2\right) + c\Box R\right], \tag{7.2.33}$$

其中的系数由表 7.1 给出。表中，N_0、$N_{\frac{1}{2}}$ 和 N_1 分别是标量粒子、外尔粒子和规范粒子的不同种类个数。表中规范粒子的 c 列了两个值，这是因为用不同方法给出的值有所不同。

表 7.1 共形不变物质场重整化能动张量表达式中各项的系数

	a	b	c	α	β
0	$-1\times N_0$	$-1\times N_0$	$1\times N_0$	$\frac{1}{120}\times N_0$	$-\frac{1}{360}\times N_0$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{4}\times N_{\frac{1}{2}}$	$-\frac{11}{2}\times N_{\frac{1}{2}}$	$3\times N_{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{40}\times N_{\frac{1}{2}}$	$-\frac{11}{720}\times N_{\frac{1}{2}}$
1	$13\times N_1$	$-62\times N_1$	$-18\times N_1$ 或 $12\times N_1$	$-\frac{3}{20}\times N_1$	$-\frac{31}{180}\times N_1$

应该强调，对于共形不变的物质场，虽然 $\langle T_\mu{}^\mu\rangle_{\text{eff}}$ 是零，但 $\langle T_\mu{}^\mu\rangle_{\text{ren}}$ 不等于零。这种经典对称性成立，而重整化后对称性不再成立的现象称为量子反常。在这里，重整化后的共形不变物质场能动张量的迹不再为零了，因而称为共形反常，或迹反常。我们记住，只有重整化后的共形反常有物理意义。从 $\langle T_\mu{}^\mu\rangle_{\text{ren}}$ 的表达式可以看出，量子物质场的共形反常完全来自经典背景时空的非平直性。

现在，让我们应用 ζ 函数方法计算重整化能动张量。这时我们只需讨论 $n=4$ 的情况。从

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{\mu\nu}(x) &= C^2(x)g_{\mu\nu}(x),\\
\bar{g}^{\mu\nu}(x) &= C^{-2}(x)g^{\mu\nu}(x),\\
\langle x|x'\rangle &= \delta^n(x,x') = \delta^n(x-x')[-g(x)]^{-\frac{1}{2}},\\
\langle \bar{x}|\bar{x}'\rangle &= \delta^n(\bar{x},\bar{x}') = \delta^n(x-x')[-\bar{g}(x)]^{-\frac{1}{2}},\\
\bar{g}(x) &= C^8 g(x),
\end{aligned} \tag{7.2.34}$$

得到

$$|\bar{x}\rangle = C^{-2}(x)|x\rangle, \tag{7.2.35}$$

这是位置本征矢量的共形变换。由于 $\phi(x)=\phi|x\rangle$，由式 (4.5.3) 知，共形不变标量场按

$$\bar{\phi}(x) = C^{-1}(x)\phi(x)$$

或

$$\bar{\phi} = C\phi \tag{7.2.36}$$

变换。因为对于共形不变物质场，福克表象是共形不变的，即

$$|\bar{n}\rangle = |n\rangle, \qquad |\bar{0}\rangle = |0\rangle, \tag{7.2.37}$$

所以，费曼传播子在共形变换下按

$$\begin{aligned}\bar{G}_{\mathrm{F}} &= \langle\bar{0}|T(\bar{\phi}\bar{\phi}')|\bar{0}\rangle \\ &= \langle 0|T(C\phi C'\phi')|0\rangle \\ &= CG_F C',\end{aligned} \tag{7.2.38}$$

其中，“′” 代表算子在“不同点”取值。由此可得，在共形变换下，有效作用量

$$\begin{aligned}\mathit{\Gamma}[\boldsymbol{g}] &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Tr}[\ln(-\mu^2 G_{\mathrm{F}})] \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\int\sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^4x\langle x|\ln(-\mu^2 G_{\mathrm{F}})|x\rangle\end{aligned} \tag{7.2.39}$$

变成

$$\begin{aligned}\mathit{\Gamma}[\bar{\boldsymbol{g}}] &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Tr}[\ln(-\mu^2\bar{G}_{\mathrm{F}})] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Tr}[\ln(-\mu^2 C^2 G_{\mathrm{F}})] \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\int\sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^4x\langle x|\ln(-\bar{\mu}^2 G_{\mathrm{F}})|x\rangle = \mathit{\Gamma}[\bar{\mu}(x),\boldsymbol{g}(x)],\end{aligned} \tag{7.2.40}$$

其中，$\bar{\mu}(x) = C(x)\mu$。

　　于是有

$$\frac{\delta\mathit{\Gamma}[\bar{\boldsymbol{g}}]}{\delta C(x)} = \int\mathrm{d}^4x'\frac{\delta\mathit{\Gamma}[\bar{\boldsymbol{g}}]}{\delta\bar{\mu}(x')}\frac{\delta\bar{\mu}(x')}{\delta C(x)} = \mu\frac{\delta\mathit{\Gamma}[\bar{\mu},\boldsymbol{g}]}{\delta\bar{\mu}(x)}。 \tag{7.2.41}$$

另外，由式 (7.2.3) 知，

$$\begin{aligned}\delta\bar{g}_{\mu\nu}(x) &= 2C(x)g_{\mu\nu}(x)\delta C(x) \\ &= 2C^{-1}(x)\bar{g}_{\mu\nu}(x)\delta C(x), \\ \delta\bar{g}^{\mu\nu}(x) &= -2C^{-1}(x)\bar{g}^{\mu\nu}(x)\delta C(x)。\end{aligned} \tag{7.2.42}$$

所以

$$\begin{aligned}\langle T_\mu{}^\mu(\bar{\boldsymbol{g}}(x))\rangle &= \frac{2}{\sqrt{-\bar{g}}}\bar{g}^{\mu\nu}(x)\frac{\delta\mathit{\Gamma}[\bar{\boldsymbol{g}}]}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}(x)} \\ &= -\frac{C(x)}{\sqrt{-\bar{g}(x)}}\frac{\delta\mathit{\Gamma}[\bar{\boldsymbol{g}}]}{\delta C(x)} = -\frac{\bar{\mu}(x)}{\sqrt{-\bar{g}(x)}}\frac{\delta\mathit{\Gamma}[\bar{\mu},\boldsymbol{g}]}{\delta\bar{\mu}(x)},\end{aligned} \tag{7.2.43}$$

但是，由式 (6.2.10) 和式 (6.2.16) 知

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{ren}}[\bar{\mu},\boldsymbol{g}]&=-\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\tilde{\zeta}'(0)+\tilde{\zeta}(0)\ln\bar{\mu}^2\right]\\ \tilde{\zeta}(0)&=\frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\int\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{2}m^4-m^2a_1(x)+a_2(x)\right],\end{aligned}$$

当 $m\to 0$ 时，有

$$\tilde{\zeta}(0)=\frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\int\sqrt{-g}\mathrm{d}^4xa_2(x),\tag{7.2.44}$$

所以

$$\Gamma_{\text{ren}}[\bar{\mu},\boldsymbol{g}]=-\frac{\mathrm{i}}{2}\tilde{\zeta}'(0)+\frac{1}{32\pi^2}\int\sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^4xa_2(x)\ln\bar{\mu}^2(x),\tag{7.2.45}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}(y)}}\frac{\delta\Gamma_{\text{ren}}(\bar{\mu})}{\delta\bar{\mu}(y)}\bigg|_{C=1}&=\frac{1}{32\pi^2\sqrt{-g(y)}}\int\sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^4xa_2(x)\frac{\delta\ln\bar{\mu}^2(x)}{\delta\bar{\mu}(y)}\bigg|_{C=1}\\&=\frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{\bar{\mu}(y)}a_2(y)\bigg|_{C=1},\end{aligned}\tag{7.2.46}$$

故

$$\langle T^{\mu}_{\mu}(x)\rangle_{\text{ren}}=-\frac{\bar{\mu}(x)}{\sqrt{-\bar{g}(x)}}\frac{\delta\Gamma_{\text{ren}}(\bar{\mu})}{\delta\bar{\mu}(x)}\bigg|_{C=1}=-\frac{a_2(x)}{16\pi^2}。\tag{7.2.47}$$

此结果正好与维数正规化方法得到的结果相同。

7.3　共形平庸情况真空能动张量的计算

半经典真空爱因斯坦场方程是

$$G_{\mu\nu}=-\kappa\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle\tag{7.3.1}$$

其中，$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ 是重整化真空能动张量，这里已略掉下标 ren。由此可见，只知道能动张量的迹还是远远不够的。在下面两节中，将介绍计算重整化真空能动张量 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ 的方法。先看共形平庸情况。

所谓共形平庸情况是指，背景时空是共形平直的，物质场是共形不变的。再次令

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x)=C^2(x)g_{\mu\nu}(x)。$$

将式 (7.2.4) 用于重整化的有效作用量，得

$$\Gamma_{\text{ren}}[\bar{\boldsymbol{g}}] = \Gamma_{\text{ren}}[\boldsymbol{g}] - \int \sqrt{-g}\langle T_\rho^\rho(\boldsymbol{g})\rangle_{\text{ren}} \delta C \mathrm{d}^n x。 \tag{7.3.2}$$

由于

$$\begin{aligned}
\frac{g^{\nu\sigma}(x)}{\sqrt{-g(x)}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\sigma}(x)} &= \frac{g^{\nu\sigma}(x)}{\sqrt{-g(x)}}\int \mathrm{d}^n y \frac{\delta \bar{g}^{\lambda\tau}(y)}{\delta g^{\mu\sigma}(x)}\frac{\delta}{\delta \bar{g}^{\lambda\tau}(y)} \\
&= \frac{g^{\nu\sigma}(x)}{\sqrt{-g(x)}}\int \sqrt{-g(y)}\mathrm{d}^n y C^{-2}(y)\delta^n(y,x)\delta^{\lambda\tau}_{(\mu\sigma)}\frac{\delta}{\delta \bar{g}^{\lambda\tau}(y)} \\
&= \frac{C^4(x)}{\sqrt{-\bar{g}(x)}}\bar{g}^{\nu\sigma}(x)\frac{\delta}{\delta \bar{g}^{\mu\sigma}(x)},
\end{aligned} \tag{7.3.3}$$

或

$$\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}(x)}}\bar{g}^{\nu\sigma}(x)\frac{\delta}{\delta \bar{g}^{\mu\sigma}(x)} = \frac{C^{-4}(x)}{\sqrt{-g(x)}}g^{\nu\sigma}(x)\frac{\delta}{\delta g^{\mu\sigma}(x)}, \tag{7.3.4}$$

所以有

$$\begin{aligned}
\langle T_\mu^\nu(\bar{\boldsymbol{g}}(x))\rangle_{\text{ren}} = C^{-4}(x)\langle T_\mu^\nu(\boldsymbol{g}(x))\rangle_{\text{ren}} - \frac{2}{\sqrt{-\bar{g}(x)}}\bar{g}^{\nu\sigma}(x)\frac{\delta}{\delta \bar{g}^{\mu\sigma}(x)} \\
\int \sqrt{-g(x')}\langle T_\rho^\rho(\boldsymbol{g}(x'))\rangle_{\text{ren}}\delta C(x')\mathrm{d}^n x',
\end{aligned} \tag{7.3.5}$$

然而

$$\langle T_\rho^\rho(\boldsymbol{g}(x))\rangle_{\text{ren}} = -\langle T_\rho^\rho(\boldsymbol{g}(x))\rangle_{\text{div}} = -\frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\frac{\delta \varGamma_{\text{ren}}(g)}{\delta C(x)}, \tag{7.3.6}$$

所以式 (7.3.5) 可被写为

$$\langle T_\mu^\nu(\bar{\boldsymbol{g}}(x))\rangle_{\text{ren}} = C^{-4}(x)\langle T_\mu^\nu(\boldsymbol{g}(x))\rangle_{\text{ren}} - \frac{2}{\sqrt{-\bar{g}}}\bar{g}^{\nu\sigma}(x)\frac{\delta}{\delta \bar{g}^{\mu\sigma}}\left(\varGamma_{\text{div}}[\bar{\boldsymbol{g}}] - \varGamma_{\text{div}}[\boldsymbol{g}]\right)。 \tag{7.3.7}$$

由式 (7.2.20) 知，在 $m\to 0, n\to 4$ 的情况下，有

$$\varGamma_{\text{div}} = \frac{1}{2}(4\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4}\varGamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\int \sqrt{-g}\mathrm{d}^n x(\alpha F + \beta G) + O(n-4), \tag{7.3.8}$$

由于有

$$\left(\frac{m}{\mu}\right)^{n-4}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right) \to \frac{2}{4-n}, \tag{7.3.9}$$

所以

$$\Gamma_{\rm div}[\bar{\boldsymbol{g}}]=-\frac{1}{16\pi^2(n-4)}\int\sqrt{-g}\mathrm{d}^n x\left[\alpha\bar{F}(x)+\beta\bar{G}(x)\right]+O(n-4), \qquad (7.3.10)$$

对于共形平直情况，$g_{\mu\nu}$ 是平直时空的度规，所以在任何坐标系下都有 $\Gamma_{\rm div}[\boldsymbol{g}]=0$，于是式 (7.3.7) 变成

$$\begin{aligned}\langle T_\mu^\nu(\bar{\boldsymbol{g}})\rangle_{\rm ren}&=C^{-4}(x)\langle T_\mu^\nu(\boldsymbol{g})\rangle_{\rm ren}-\frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{9}\alpha^{(1)}\bar{H}_\mu^\nu+2\beta^{(3)}\bar{H}_\mu^\nu\right]\\&=\left(\frac{g}{\bar{g}}\right)^{\frac{1}{2}}\langle T_\mu^\nu(\boldsymbol{g})\rangle_{\rm ren}-\frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{9}\alpha^{(1)}\bar{H}_\mu^\nu+2\beta^{(3)}\bar{H}_\mu^\nu\right], \qquad (7.3.11)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}{}^{(1)}\bar{H}_{\mu\nu}&\equiv\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}\frac{\delta}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}}\int\sqrt{-\bar{g}}\bar{R}^2\mathrm{d}^n x\\&=2\bar{R}_{;\mu\nu}-2\bar{g}_{\mu\nu}\bar{\Box}\bar{R}-\frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R^2+2\bar{R}\bar{R}_{\mu\nu}, \qquad (7.3.12)\\{}^{(3)}\bar{H}_{\mu\nu}&\equiv\frac{1}{12}\bar{R}^2\bar{g}_{\mu\nu}-\bar{R}^{\rho\sigma}\bar{R}_{\rho\mu\sigma\nu}\\&=\frac{1}{4}\bar{R}^2\bar{g}_{\mu\nu}+\bar{R}_\mu^\rho\bar{R}_{\rho\nu}-\frac{2}{3}\bar{R}\bar{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\bar{R}_{\rho\sigma}\bar{R}^{\rho\sigma}\bar{g}_{\mu\nu} \qquad (7.3.13)\end{aligned}$$

是所要计算真空能动张量的时空的纯几何量，它们可用任何几何方法算出。和 7.2 节一样，α、β 与 a、b、c 相联系。

方程 (7.3.11) 意味着，当背景时空共形平直、物质场共形不变时，重整化能动张量 $\langle T_\mu^\nu\rangle_{\rm ren}$ 完全由迹反常 $\langle T_\mu^\mu(\bar{\boldsymbol{g}})\rangle_{\rm ren}$ 和 $\langle T_\mu^\nu(\boldsymbol{g})\rangle_{\rm ren}$ 来决定。

有两个不同种类的平直时空：一个是闵可夫斯基时空，另一个是伦德勒时空，虽然他们局部相同，但整体不同。对于闵可夫斯基时空

$$\langle T_\mu^\nu(\boldsymbol{g})\rangle_{\rm ren}=0, \qquad (7.3.14)$$

这是因为我们可用正规积抵消零点能的贡献

$$\sum_k\frac{1}{2}\epsilon_k=\infty。 \qquad (7.3.15)$$

但对伦德勒时空，堪德拉 (Candelas) 和多伊奇 (Deutsch) 指出[56]

$$\langle T_\mu^\nu(\boldsymbol{g})\rangle=-\frac{h(s)}{2\pi^2\alpha^4}\int_0^\infty\mathrm{d}\nu\frac{\nu(\nu^2+s^2)}{\mathrm{e}^{2\pi\nu}-(-1)^{2s}}\mathrm{diag}\left(1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right), \qquad (7.3.16)$$

其中，$h(s)$ 是自旋为 s 的场的螺旋态数目，$\alpha\equiv a^{-1}e^{a\xi}$。所以，当用式 (7.3.11) 在共形平庸情况下计算 $\langle T_\mu^\nu(\bar{\boldsymbol{g}})\rangle_{\rm ren}$ 时，式 (7.3.11) 右手边的第一项可以是式 (7.3.14)，也可以是式 (7.3.16)，这根据时空 $\bar{\boldsymbol{g}}$ 共形于闵可夫斯基时空还是伦德勒时空而定。

最重要的共形平直时空是费里德曼–罗伯逊–沃克时空

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = C^2(\eta)\left[\mathrm{d}\eta^2 - h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right], \tag{7.3.17}$$

其中，$h_{ij} = \mathrm{diag}(\varUpsilon, r^2, r^2\sin^2\theta)$, $\varUpsilon = (1-\mathrm{k}r^2)^{-1}$, $\mathrm{k} = -1,\ 0,\ +1$。从三维空间的均匀性和各向同性性质，可以知道

$$\begin{cases} \langle T_1^1\rangle_{\mathrm{ren}} = \langle T_2^2\rangle_{\mathrm{ren}} = \langle T_3^3\rangle_{\mathrm{ren}}, \\ \langle T_\mu^\nu\rangle_{\mathrm{ren}} = 0(\mu\neq\nu\text{时})。\end{cases} \tag{7.3.18}$$

定义

$$D = \frac{\dot{C}}{C}, \tag{7.3.19}$$

其中，$\dot{C}\equiv\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}C(\eta)$。对于式 (7.3.17) 所示度规，其非零克氏符是

$$\begin{cases} \bar{\Gamma}^0_{00} = \bar{\Gamma}^1_{01} = \bar{\Gamma}^2_{02} = \bar{\Gamma}^3_{03} = D, \quad \bar{\Gamma}^0_{11} = D\varUpsilon, \quad \bar{\Gamma}^0_{22} = Dr^2, \\ \bar{\Gamma}^0_{33} = Dr^2\sin^2\theta, \quad \bar{\Gamma}^1_{11} = \mathrm{k}r\varUpsilon, \quad \bar{\Gamma}^1_{22} = -r\varUpsilon^{-1}, \\ \bar{\Gamma}^1_{33} = -r\varUpsilon^{-1}\sin^2\theta,\ \bar{\Gamma}^2_{12} = \bar{\Gamma}^3_{13} = \dfrac{1}{r},\ \bar{\Gamma}^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,\ \bar{\Gamma}^3_{23} = \cot\theta, \end{cases} \tag{7.3.20}$$

里契张量的非零分量和曲率标量是

$$\begin{cases} \bar{R}_{00} = 3\dot{D}, \quad \bar{R}_{11} = -(\dot{D} + 2D^2 + 2\mathrm{k})\varUpsilon, \\ \bar{R}_{22} = \varUpsilon^{-1}r^2\bar{R}_{11}, \quad \bar{R}_{33} = \sin^2\theta\bar{R}_{22} \\ \bar{R} = 6C^{-2}(\dot{D} + D^2 + \mathrm{k}), \end{cases} \tag{7.3.21}$$

所以，对于费里德曼–罗伯逊–沃克时空, ${}^{(1)}\bar{H}_{\mu\nu}$ 和 ${}^{(3)}\bar{H}_{\mu\nu}$ 的非零分量是

$$\begin{cases} {}^{(1)}\bar{H}_{00} = 18C^{-2}\big(-2\ddot{D}D + \dot{D}^2 + 3D^4 + 2\mathrm{k}D^2 - \mathrm{k}^2\big), \\ {}^{(1)}\bar{H}_{ij} = 12C^{-2}h_{ij}\left(\dddot{D} - \ddot{D}D + \dfrac{1}{2}\dot{D}^2 - 6\dot{D}D^2 + \dfrac{3}{2}D^4 - 2\mathrm{k}\dot{D} + \mathrm{k}D^2 - \dfrac{1}{2}\mathrm{k}^2\right), \\ {}^{(3)}\bar{H}_{00} = 3C^{-2}\big(D^4 + 2\mathrm{k}D^2 + \mathrm{k}^2\big), \\ {}^{(3)}\bar{H}_{ij} = C^{-2}h_{ij}\big(-4\dot{D}D^2 + D^4 - 4\mathrm{k}\dot{D} + 2\mathrm{k}D^2 + \mathrm{k}^2\big)。\end{cases} \tag{7.3.22}$$

现在我们来计算在一些宇宙模型中共形不变物质场的 $\langle T_\mu^\nu\rangle_{\mathrm{ren}}$。

1. 静态爱因斯坦宇宙

静态爱因斯坦宇宙的度规可表示为

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2\mathrm{d}\varOmega_3^2 = a^2\big\{\big[\mathrm{d}(t/a)\big]^2 - \mathrm{d}\varOmega_3^2\big\}, \tag{7.3.23}$$

其中，$\mathrm{d}\Omega_3^2$ 是 3 维单位球面的线元，由式 (2.3.4) 知，它可写成

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = 4a^2\cos^2\frac{(t/a)+\chi}{2}\cos^2\frac{(t/a)-\chi}{2}\mathrm{d}s_{\mathrm{M}}^2, \tag{7.3.24}$$

其中，$\mathrm{d}s_{\mathrm{M}}^2$ 是闵可夫斯基时空。闵可夫斯基时空上的真空态用 $|0\rangle_{\mathrm{M}}$ 表示，该真空态的重整化能动张量为零。静态爱因斯坦宇宙与闵可夫斯基时空间的共形因子为 $C=2a\cos\dfrac{(t/a)+\chi}{2}\cos\dfrac{(t/a)-\chi}{2}$。然而，为计算静态爱因斯坦宇宙的 ${}^{(1)}\bar{H}_{\mu\nu}$ 和 ${}^{(3)}\bar{H}_{\mu\nu}$，没有必要从这个共形因子出发，而直接利用式 (7.3.22) 及 $C=a$ 即可。于是，可以得到

$$\langle T_\mu^\nu\rangle_{\substack{\text{static}\\ \text{Einstein}}} = \frac{p(s)}{2\pi^2a^4}\mathrm{diag}\left(1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right), \tag{7.3.25}$$

其中，$p(0)=\dfrac{1}{240}$，$p\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{17}{960}$，$p(1)=\dfrac{11}{120}$。

2. 稳恒态宇宙与闭德西特宇宙

稳恒态宇宙的线元为

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \mathrm{d}t^2-\alpha^2\mathrm{e}^{\frac{2t}{\alpha}}(\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\Omega^2), \tag{7.3.26}$$

闭德西特宇宙 (k = 1 的德西特宇宙) 的线元为

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \mathrm{d}t^2-\alpha^2\cosh^2\left(\frac{t}{\alpha}\right)(\mathrm{d}\chi^2+\sin^2\chi\mathrm{d}\Omega^2), \tag{7.3.27}$$

其中，$\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{\Lambda}}$，共形真空用 $|0\rangle_{\mathrm{M}}$ 表示, 再次利用式 (7.3.22) 及

$$C(\eta)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\eta-\eta_0} & (\text{稳恒态宇宙})\\[2mm] \dfrac{\alpha}{\cos(\eta-\eta_0)} & (\mathrm{k}=1\ \text{的德西特宇宙})\end{cases}$$

直接计算出两时空的 ${}^{(1)}\bar{H}_{\mu\nu}$ 和 ${}^{(3)}\bar{H}_{\mu\nu}$，即

$${}^{(1)}\bar{H}_{\mu\nu}=0,$$

$${}^{(3)}\bar{H}_{ij}=-{}^{(3)}\bar{H}_{00}h_{ij},\qquad {}^{(3)}\bar{H}_{00}=\frac{3}{\alpha^2}\times\begin{cases}\dfrac{1}{(\eta-\eta_0)^2} & (\text{稳恒态宇宙})\\[2mm] \dfrac{1}{\cos^2(\eta-\eta_0)} & (\mathrm{k}=1\ \text{的德西特宇宙})\end{cases}$$

从而得到

$$\langle T_\mu^\nu\rangle_{\substack{\text{steady state/}\\ \text{k=1 de Sitter}}} = \frac{q(s)}{960\pi^2\alpha^4}\delta_\mu^\nu, \tag{7.3.28}$$

其中，$q(0)=1$，$q\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{2}$，$q(1)=62$。

3. k = −1 的静态罗伯逊–沃克宇宙 (开爱因斯坦宇宙)

考虑 k = −1 的静态罗伯逊–沃克宇宙

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = a^2[\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\chi^2 - \sinh^2\chi \mathrm{d}\Omega^2]。 \tag{7.3.29}$$

定义新的坐标

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{\cosh\chi - \sinh\chi\cos\theta},\\ y &= \frac{\sinh\chi\sin\theta\cos\varphi}{\cosh\chi - \sinh\chi\cos\theta},\\ z &= \frac{\sinh\chi\sin\theta\sin\varphi}{\cosh\chi - \sinh\chi\cos\theta},\end{aligned} \tag{7.3.30}$$

在新的坐标下式 (7.3.29) 变为

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = a^2\rho^{-2}[\rho^2\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\rho^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2], \tag{7.3.31}$$

即静态开爱因斯坦宇宙共形于伦德勒时空，共形因子 $C = a/\rho$，ρ 恰好是静止在伦德勒时空的 $(\rho,\ y,\ z)$ 处粒子的固有加速度的倒数。取共形真空态 $|0\rangle_{\mathrm{R}}$，静态开爱因斯坦宇宙的 ${}^{(1)}H_{\mu\nu}$ 和 ${}^{(3)}H_{\mu\nu}$ 与静态爱因斯坦宇宙的结果完全相同，因此

$$\langle T_\mu^\nu\rangle_{\substack{\text{static}\\ \text{open}}} = \frac{\rho^4}{a^4}\langle T_\mu^\nu\rangle_{\text{Rindler}} + \langle T_\mu^\nu\rangle_{\substack{\text{static}\\ \text{Einstein}}}, \tag{7.3.32}$$

其中，$\langle T_\mu^\nu\rangle_{\text{Rindler}} =$ 式 (7.3.16)。由于式 (7.3.25) 中的 $p(s)$ 可写成

$$p(s) = h(s)\int_0^\infty \mathrm{d}\nu \frac{\nu(\nu^2+s^2)}{\mathrm{e}^{2\pi\nu} - (-1)^{2s}}, \tag{7.3.33}$$

将这一结果及式 (7.3.16) 代入式 (7.3.32)，立即可得静态开爱因斯坦宇宙的真空重整化能动张量为零，即

$$\langle T_\mu^\nu\rangle_{\substack{\text{static}\\ \text{open}}} = 0。 \tag{7.3.34}$$

4. k = −1 的德西特宇宙

k = −1 的德西特宇宙度规为式 (2.6.13)[16], 即

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\bar{s}^2 &= \mathrm{d}t^2 - \alpha^2\sinh^2(t/\alpha)\left(\mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi\mathrm{d}\Omega^2\right)\\ &= \frac{\alpha^2}{\sinh^2\eta}\left(\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\chi^2 - \sinh^2\chi\mathrm{d}\Omega^2\right)\\ &= \frac{\alpha^2}{\rho^2\sinh^2\eta}\left(\rho^2\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\rho^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2\right),\end{aligned} \tag{7.3.35}$$

$\sinh\eta = \dfrac{1}{\sinh(t/\alpha)}$，$\alpha$ 是德西特半径，第三个等号再次用到坐标变换式 (7.3.30)。再次取共形真空态 $|0\rangle_{\mathrm{R}}$，由式 (7.3.20) 知，$\mathrm{k}=-1$ 的德西特宇宙有

$$^{(1)}\bar{H}_{\mu\nu}=0, \qquad ^{(3)}\bar{H}_{ij}=-h_{ij}{}^{(3)}\bar{H}_{00}=-\frac{3}{\alpha^2}\frac{1}{\sinh^2\eta}h_{ij}。$$

对于共形不变标量场

$$\langle T_\mu^\nu\rangle_{\substack{\mathrm{k}=-1\\ \text{de Sitter}}}=\frac{1}{960\pi^2\alpha^4}\delta_\mu^\nu-\frac{\sinh^4\eta}{480\pi^2\alpha^4}\mathrm{diag}\left(1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)。 \tag{7.3.36}$$

5. 静态德西特宇宙

静态德西特宇宙由式 (2.6.12) 给出，即

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\bar{s}^2&=\left(1-\frac{r^2}{\alpha^2}\right)\mathrm{d}t^2-\left(1-\frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2-r^2\mathrm{d}\varOmega^2\\&=\left(1-\frac{r^2}{\alpha^2}\right)\left[\mathrm{d}t^2-\left(1-\frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-2}\mathrm{d}r^2-r^2\left(1-\frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1}\mathrm{d}\varOmega^2\right]。\end{aligned}$$

在坐标变换

$$\eta=t/\alpha, \qquad r=\alpha\tanh\chi \tag{7.3.37}$$

下，它变为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\bar{s}^2&=\frac{\alpha^2}{\cosh^2\chi}\left(\mathrm{d}\eta^2-\mathrm{d}\chi^2-\sinh^2\chi\mathrm{d}\varOmega^2\right)\\&=\frac{\alpha^2}{\rho^2\cosh^2\chi}\left(\rho^2\mathrm{d}\eta^2-\mathrm{d}\rho^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2\right)。\end{aligned} \tag{7.3.38}$$

取共形真空态 $|0\rangle_{\mathrm{R}}$。第 2.6 节已阐明静态德西特可由 $\mathrm{k}=0$ 的德西特 (稳恒态宇宙) 通过坐标变换得到，其 $^{(1)}H_{\mu\nu}$ 和 $^{(3)}H_{\mu\nu}$ 也可由稳恒态宇宙通过坐标变换得到，具体计算表明它们是相同的。于是

$$\begin{aligned}\langle T_\mu^\nu\rangle_{\substack{\text{static}\\ \text{de Sitter}}}&=\rho^4(\alpha^2-r^2)^{-2}\langle T_\mu^\nu\rangle+\langle T_\mu^\nu\rangle_{\substack{\text{steady}\\ \text{state}}}\\&=\frac{q(s)}{960\pi^2\alpha^4}\delta_\mu^\nu-\frac{p(s)}{2\pi^2}(\alpha^2-r^2)^{-2}\mathrm{diag}\left(1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)。\end{aligned} \tag{7.3.39}$$

它在 $r=\alpha(\chi\to\pm\infty)$ 处是发散的。

7.4　一般情况下真空能动张量的计算

原则上我们可以采用下述方法计算物质场的真空能动张量。

(1) 应用费曼传播子的 D-S 展开 $D_{\mathrm{F}}^{\mathrm{D-S}}(x,x\prime)$，得到重整化的有效拉氏量

$$\mathscr{L}_{\text{ren}} = \frac{1}{32\pi^2}\int_0^{\infty}\sum_{j=3}^{\infty} a_j(x)(\mathrm{i}s)^{j-3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}\mathrm{i}\mathrm{d}s \tag{7.4.1}$$

和重整化的有效作用量 $\varGamma_{\text{ren}}$；

(2) 从

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\text{ren}} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\varGamma_{\text{ren}}}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{7.4.2}$$

得到 $\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\text{ren}}$。

但实际上，这几乎是不可能的，因为 ① $j \geqslant 3$ 的 a_j 很复杂，例如 a_3 有 46 项。详细内容可见文献[41−43]。② 为了用泛函微分从 $\varGamma_{\text{ren}}$ 计算 $\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\text{ren}}$，我们知道对于所有几何 $g_{\mu\nu}$ 的 $\varGamma_{\text{ren}}$，除共形平庸情况外，那几乎是不可能的。

为求出 $\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\text{ren}}$，我们可以通过对称性考虑得到重要线索。

7.4.1　德西特时空中的 $\langle 0|\boldsymbol{T_{\mu\nu}}|0\rangle_{\text{ren}}$

德西特时空是具有最大对称性的时空。现在考虑与德西特时空具有相同对称性的真空 $|0\rangle_{\mathrm{d}S}$。由于在德西特时空上，唯一的德西特不变的二阶张量是 $g_{\mu\nu}$[4]，所以

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{d}S} = \frac{Tg_{\mu\nu}}{n}, \tag{7.4.3}$$

式中，n 是时空维数，显然

$$T = \langle 0|T^{\mu}_{\mu}|0\rangle_{\mathrm{d}S}. \tag{7.4.4}$$

所以，在德西特不变的情况下，计算 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\mathrm{d}S}$ 的问题可以化为对 $\langle 0|T^{\mu}_{\mu}|0\rangle_{\mathrm{d}S}$ 的计算。

对于 n 维时空中有质量标量场的作用量和能动张量分别为[1]

$$S = \frac{1}{2}\int\sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^n x\{g^{\mu\nu}(x)\phi_{,\mu}(x)\phi_{,\nu}(x) - [m^2 + \xi R(x)]\phi^2(x)\}, \tag{7.4.5}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}(x) =& \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}(x)}\\
=& (1-2\xi)\phi_{,\mu}(x)\phi_{,\nu}(x) + \left(2\xi - \frac{1}{2}\right)g_{\mu\nu}(x)g^{\rho\sigma}(x)\phi_{,\rho}(x)\phi_{,\sigma}(x)\\
& -2\xi\phi(x)\phi_{;\mu\nu}(x) + \frac{2}{n}\xi g_{\mu\nu}(x)\phi(x)\Box\phi(x)\\
& -\xi\left[R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}R(x)g_{\mu\nu}(x) + \frac{2(n-1)}{n}\xi R(x)g_{\mu\nu}(x)\right]\phi^2(x)\\
& +2\left[\frac{1}{4} - (1-\frac{1}{n})\xi\right]m^2 g_{\mu\nu}(x)\phi^2(x),
\end{aligned} \tag{7.4.6}$$

能动张量的迹为

$$
\begin{aligned}
T_\mu^\mu(x) =& 2(n-1)[\xi-\xi(n)]\phi_{,\mu}(x)\phi^{,\mu}(x) - 2(n-1)\xi(\xi-\xi(n))R(x)\phi^2(x) \\
&+m^2\phi^2(x) - 2(n-1)(\xi-\xi(n))m^2\phi^2(x) \\
=& 2(n-1)[\xi-\xi(n)](\phi_{,\mu}(x)\phi^{,\mu}(x)+\phi(x)\Box\phi(x)) + m^2\phi^2(x) \\
=& m^2\phi^2(x) + (n-1)[\xi-\xi(n)]\Box\phi^2(x),
\end{aligned}
\tag{7.4.7}
$$

式中，$\xi(n) = \dfrac{n-2}{4(n-1)}$, 其中的第二个等号用到标量场方程

$$
\left[\Box + m^2 + \xi R(x)\right]\phi(x) = 0。\tag{7.4.8}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\langle 0|T_\mu^\mu|0\rangle =& m^2\langle 0|\phi(x)\phi(x)|0\rangle + (n-1)[\xi-\xi(n)]\Box\langle 0|\phi(x)\phi(x)|0\rangle \\
=& \frac{1}{2}m^2\langle 0|\{\phi(x),\phi(x)\}|0\rangle + (n-1)[\xi-\xi(n)]\Box\frac{1}{2}\langle 0|\{\phi(x),\phi(x)\}|0\rangle \\
=& \frac{1}{2}m^2G^{(1)}(x) + \frac{1}{2}(n-1)[\xi-\xi(n)]\Box G^{(1)}(x),
\end{aligned}
\tag{7.4.9}
$$

式中，$G^{(1)}(x)=\lim\limits_{x'\to x}G^{(1)}(x,x')$，$G^{(1)}(x,x')$ 是阿达玛基本函数。注意，式 (7.4.9) 对任意真空均成立，对不同的真空，$G^{(1)}(x)$ 的表达式可以不同。然而，在 4 维空间中，$G^{(1)}(x)$ 是发散的。为绕过发散问题，堪德拉和瑞恩 (Raine)[57]，道克 (Dowker) 和克里池雷 (Critchley)[58] 分别给出了在 n 维德西特时空德西特不变真空中有质量标量场的 $G^{(1)}(x)$

$$
G^{(1)}(x) = \frac{2\alpha^2}{(4\pi\alpha^2)^{\frac{n}{2}}}\frac{\Gamma\left[\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+\nu(n)\right]\Gamma\left[\frac{n}{2}-\frac{1}{2}-\nu(n)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}+\nu(n)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}-\nu(n)\right]}\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right),\tag{7.4.10}
$$

其中

$$
[\nu(n)]^2 = \frac{1}{4}(n-1)^2 - m^2\alpha^2 - \xi n(n-1),\tag{7.4.11}
$$

$\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{\Lambda}}$ 是德西特的半径。正如所预期的， 德西特不变真空的阿达玛函数不依赖时空点，即 $G^{(1)}(x)$ 不依赖于 x，所以，式 (7.4.9) 中只有第一项对迹有贡献，于是，我们得到

$$
\langle T_\mu^\mu\rangle = \frac{1}{2}m^2G^{(1)}(x)。\tag{7.4.12}
$$

很明显，$n=4$ 的极点存在于式 (7.4.10) 的 $\Gamma\left(1-\dfrac{n}{2}\right)$ 项中，它需通过在 $n=4$ 附近的展开而去除。为此，仿照费曼传播子德维特–施温格展开，对阿达玛函数作德维特–施温格展开，其前三项作为发散减除项

$$\begin{aligned}G^{(1)}_{\mathrm{DS,div}}(x)=&\frac{2}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^{\infty}\mathrm{i}\mathrm{d}s(\mathrm{i}s)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2s}\left[a_0(x)+\mathrm{i}sa_1(x)+(\mathrm{i}s)^2a_2(x)\right]\\=&\frac{2m^{n-4}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\left[a_0(x)m^2\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)+a_1(x)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\right.\\&\left.+a_2(x)m^{-2}\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)\right],\end{aligned}\tag{7.4.13}$$

对 n 维德西特时空中，由式 (5.2.24) 知

$$\begin{aligned}a_0(x)=&1,\\a_1(x)=&\left(\frac{1}{6}-\xi\right)n(n-1)\alpha^{-2}\\=&12\left(\frac{1}{6}-\xi\right)\alpha^{-2}+7\left(\frac{1}{6}-\xi\right)\alpha^{-2}(n-4)+o(n-4),\end{aligned}\tag{7.4.14}$$

最后一步用到对 $n(n-1)$ 在 $n=4$ 作泰勒展开并只取前两项。$\Gamma(3-n/2)$ 在 $n=4$ 并不发散，故 $a_2(x)$ 对 n 的展开只需计算到零阶项 (直接取 $n=4$) 即可，对 4 维德西特时空中

$$a_2(x)=\left[2(1-6\xi)^2-\frac{1}{15}\right]\alpha^{-4}。\tag{7.4.15}$$

利用式 (6.1.7) 及

$$\psi(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\Gamma(z),\qquad\gamma=-\psi(1)\sim\text{欧拉常数},\tag{7.4.16}$$

得

$$\begin{aligned}G^{(1)}_{\mathrm{DS,div}}(x)=&\frac{1}{8\pi^2\alpha^2}\left[1+(n-4)\ln\left(\frac{m}{2\sqrt{\pi}}\right)\right]\left\{m^2\alpha^2\frac{2}{n-2}\left(\frac{2}{n-4}+\gamma\right)\right.\\&+\left[2(1-6\xi)+7\left(\frac{1}{6}-\xi\right)(n-4)\right]\left(\frac{2}{4-n}-\gamma\right)\\&\left.+\frac{1}{m^2\alpha^2}\left[2(1-6\xi)^2-\frac{1}{15}\right]\right\}\\=&\frac{1}{8\pi^2\alpha^2}\left\{\left[m^2\alpha^2-2(1-6\xi)\right]\frac{2}{n-2}\left(\frac{2}{n-4}+\gamma\right)\right.\\&-2(1-6\xi)+\left[m^2\alpha^2-2(1-6\xi)\right]\ln\left(\frac{m^2}{4\pi}\right)-14\left(\frac{1}{6}-\xi\right)\\&\left.+\frac{1}{m^2\alpha^2}\left[2(1-6\xi)^2-\frac{1}{15}\right]\right\},\end{aligned}\tag{7.4.17}$$

在后一等式中用到 $\dfrac{2}{n-2}\approx 1-\dfrac{1}{2}(n-4)$。在 $n=4$ 附近展开式 (7.4.10) 得

$$
\begin{aligned}
G^{(1)}(x)=&\frac{1-(n-4)\ln(2\sqrt{\pi}\alpha)}{8\pi^2\alpha^2}\left[\frac{1}{4}-\nu^2(4)\right]\left\{1+\psi\left(\frac{3}{2}+\nu(4)\right)\left(\nu'(4)+\frac{1}{2}\right)(n-4)\right.\\
&+\psi\left(\frac{3}{2}-\nu(4)\right)\left[\frac{1}{2}-\nu'(4)\right](n-4)-\psi\left(\frac{1}{2}+\nu(4)\right)\nu'(4)(n-4)\\
&\left.+\psi\left(\frac{1}{2}-\nu(4)\right)\nu'(4)(n-4)\right\}\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)+O(n-4),\\
=&\frac{1}{8\pi^2\alpha^2}\left\{\left[\frac{1}{4}-\nu^2(4)\right]\frac{2}{2-n}\left(\frac{2}{4-n}-\gamma\right)+\left[\frac{1}{4}-\nu^2(4)\right]\left[\psi\left(\frac{3}{2}+\nu(4)\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+\psi\left(\frac{3}{2}-\nu(4)\right)-\ln(4\pi\alpha^2)\right]-4\nu(4)\nu'(4)+O(n-4)\right\},
\end{aligned}
$$

注意到，$\dfrac{1}{4}-\nu^2(4)=m^2\alpha^2-2(1-6\xi)$，所以，

$$
\begin{aligned}
G^{(1)}_{\text{ren}}(x)=&G^{(1)}(x)-G^{(1)}_{\text{DS,div}}\\
=&\frac{1}{8\pi^2\alpha^2}\left\{\left[m^2\alpha^2-2(1-6\xi)\right]\left[\psi\left(\frac{3}{2}+\nu(4)\right)+\psi\left(\frac{3}{2}-\nu(4)\right)-\ln(m^2\alpha^2)\right.\right.\\
&\left.\left.-1\right]+m^2\alpha^2-\frac{2}{3}-\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2a_2\right\}+O(n-4)。
\end{aligned}
\tag{7.4.18}
$$

用式 (7.4.12)，式 (7.4.18) 及式 (7.4.3) 可得

$$
\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\text{ren}}=&\frac{g_{\mu\nu}}{64\pi^2}\left\{m^2\left[m^2+\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R\right]\left[\psi\left(\frac{3}{2}+\nu(4)\right)+\psi\left(\frac{3}{2}-\nu(4)\right)\right.\right.\\
&\left.-\ln(12m^2R^{-1})\right]-m^2\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R-\frac{1}{18}m^2R\\
&\left.-\frac{1}{2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)^2R^2+\frac{1}{2160}R^2\right\}。
\end{aligned}
\tag{7.4.19}
$$

对于无质量共形耦合标量场，式 (7.4.12) 和式 (7.4.18) 给出

$$
T_{\text{ren}}=-\frac{a_2}{16\pi^2},\tag{7.4.20}
$$

它与式 (7.2.47) 相同。

小结

在德西特时空中计算 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{ren}}$ 的方法如下：

(1) 如果 $m=0$，且物质场是共形不变的，可以用 7.3 节的方法来解决。

(2) 如果 $m\neq 0$，我们选择德西特不变真空，对标量场，精确解由式 (7.4.19) 给出；对狄拉克场，解决方法见文献 [57]。

(3) 如果 $m \neq 0$，选择非德西特不变真空，可见文献 [42]，该文在 $\dfrac{k}{m} \ll 1$ 的条件下，对于 $s=0$，$\dfrac{1}{2}$，1 三种情况，计算了德西特时空中的 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$。

7.4.2 在静态爱因斯坦宇宙中的 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{ren}}$

静态爱因斯坦宇宙的度规可写成

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1-r^2/a^2}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega_2^2。 \tag{7.4.21}$$

对于共形不变标量场，我们已在 7.3 节中给出了结果。现在我们将用更简化的 ζ 函数正规化方法来计算重整化能动张量。

用 E 表示真空总能量，对于爱因斯坦宇宙中的共形耦合无质量标量场有

$$E = \int \sqrt{h}\mathrm{d}^3x\langle 0|T_0^0|0\rangle。 \tag{7.4.22}$$

应该记得，平直时空中一维零质量标量场的基态能量可写成

$$E = \sum \frac{1}{2}\hbar\omega = \sum \frac{1}{2}k, \tag{7.4.23}$$

其中，k 是波数的模。对于膨胀时空，它应改为

$$E = \sum \frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{a} = \sum \frac{1}{2}\frac{k}{a}, \tag{7.4.24}$$

这里，a 是尺度因子。对于膨胀的 $\mathrm{k}=1$ 的 3 维时空，这个式子就应进一步改为

$$E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{J=0}^{k-1}\sum_{m=-J}^{J}\left(\frac{k}{a}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(\frac{k}{a}\right), \tag{7.4.25}$$

显然，当 $k\to\infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^3 \to \infty^4。 \tag{7.4.26}$$

用 ζ 函数正规化，

$$\begin{aligned}E &= \lim_{s\to -1}\sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{(2a)^s}{k^s} = \lim_{s\to -1}(2a)^s\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{s-2}} \\ &= \lim_{s\to -1}(2a)^s\zeta(s-2) = \frac{1}{2a}\zeta(-3) = \frac{1}{240a},\end{aligned} \tag{7.4.27}$$

式中，$\zeta(-n) = -\dfrac{B_{n+1}}{n+1}$，(详见文献 [59])。 B_n 为伯努利 (Bernouli) 数，并且 $B_1 =$

$-\dfrac{1}{2}, B_2=\dfrac{1}{6}, B_3=0, B_4=-\dfrac{1}{30}$。爱因斯坦宇宙的空间体积是 $2\pi^2a^3$，所以，对共形不变标量场

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle_{\text{ren}} = \rho = \frac{1}{480\pi^2 a^4} > 0。\tag{7.4.28}$$

从

$$\langle 0|T_\mu^\mu|0\rangle_{\text{ren}} = 0 \tag{7.4.29}$$

和爱因斯坦宇宙的对称性，可得

$$\langle 0|T_\mu^\nu|0\rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{480\pi^2 a^4}\text{diag}\left(1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)。\tag{7.4.30}$$

这与式 (7.3.25) 的结果一致，详见文献 [60]。

7.4.3 用点分离正规化方法计算 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{ren}}$

与维数正规化法和 ζ 函数正规化法相比，最有效的正规化方法是点分离法。计算 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ 的步骤如下：

(1) 为了得到模函数的完全集，解方程，定义福克空间 (真空态，粒子态);

(2) 把 $G^{(1)}(x,x')$ 表为模函数的和;

(3) 定义 $G^{(1)}_{\text{ren}}(x,x')$ 为

$$G^{(1)}_{\text{ren}}(x,x') \equiv G^{(1)}(x,x') - {}^{(n)}G^{(1)}_{\text{DS}}(x,x'),\tag{7.4.31}$$

式中，${}^{(n)}G^{(1)}_{\text{DS}}(x,x')$ 是对 n 阶 $\mathscr{L}_{\text{div}}$ 有贡献的项之和;

(4) 对 $G^{(1)}_{\text{ren}}$ 进行操作以形成 $\langle 0|T_{\mu\nu}(x,x')|0\rangle_{\text{ren}}$;

(5) 让 $x'\to x$ 显示 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{\text{ren}}$ 的有限结果。

有必要对第 4 步做一些特别说明。原则上，我们有两种办法计算重整化能动张量：其一是先分别计算 $G^{(1)}$ 和 ${}^{(n)}G^{(1)}_{\text{DS}}$ 对能动张量的贡献，然后再计算它们的差；其二是先计算出重整化的格林函数 $G^{(1)}_{\text{ren}}$，然后直接由 $G^{(1)}_{\text{ren}}$ 计算出重整化能动张量。无论哪种方法，能动张量的真空平均值与格林函数之间在形式上都有

$$\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle = \lim_{x'\to x} D_{\mu\nu}(x,x')G^{(1)}(x,x')。\tag{7.4.32}$$

由于格林函数 $G^{(1)}(x,x')$ 不是时空点 x 的标量函数，而是关于 x 和 x' 两个时空点的双标量函数，$\langle T_{\mu\nu}(x,x')\rangle$ 也就不是时空点 x 的二秩张量场, 因而式 (7.4.32) 中 $D_{\mu\nu}(x,x')$ 是一个非局域的两点算子。以 4 维共形不变标量场为例，式 (7.1.22) 的第一项的真空期待值是

$$\frac{2}{3}\langle 0|(\boldsymbol{\nabla}_\mu\phi(x))(\boldsymbol{\nabla}_\nu\phi(x))|0\rangle,\tag{7.4.33}$$

采用点分离技术后，它变为

$$\frac{2}{3}\langle 0|(\boldsymbol{\nabla}_\mu\phi(x))(\boldsymbol{\nabla}'_\nu\phi(x'))|0\rangle=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\nabla}_\mu\boldsymbol{\nabla}'_\nu+\boldsymbol{\nabla}'_\mu\boldsymbol{\nabla}_\nu)\frac{1}{2}G^{(1)}(x,x'),$$

其中，$\boldsymbol{\nabla}'_\nu$ 表示在 x' 处求协变导数，这意味着所得结果不是一个时空点 x 的张量场，而是关于两个时空点 x 和 x' 的双矢量场①。为了把一个关于两点的双矢量场转换成一个关于时空点 x 的具有广义协变性的张量场，应该作平行移动。例如，可以把两个矢量同时平行移动到 x 和 x' 的中点，也可以将一点的矢量平行移动到另一点，当然也可以将两个矢量同时平行移动到其他点。克里斯坦森 (Christenson) 指出[38]，在一般时空中，平行移动得到的结果不同于简单地取极限 $x'\to x$ 时所得到的量，其差值是 $G^{(1)}(x,x')$ 展开中的 σ^{-1} 因子乘以 σ 阶移动的修正，即使在 $x'=x$ 的极限下，这些差值也不为零, (详见文献 [38, 61, 62] 等)。这就使得按第一种方案来计算重整化能动张量变得异常复杂。

然而，如果 $G^{(1)}(x,x')$ 首先按式 (7.4.31) 重整化，然后直接利用重整化的格林函数 $G^{(1)}$ 计算重整化能动张量 $\langle 0|T_{\mu\nu}(x,x')|0\rangle_{\rm ren}$，则在任何情况下所有的 σ^{-1} 项都抵消掉了，所以，任何移动带来的修正都是 σ 阶的，在计算结束前令 $\sigma\to 0$ 时，它们都为零。这样可大大简化计算过程。

下面，我们来讨论两个具体例子。为了方便，我们考虑格林函数是关于 x' 和 x'' 的，并考虑对称移动，即沿着连接 x' 和 x'' 的一条非类光测地线平行移动协变量到中点 x(图 7.5)。

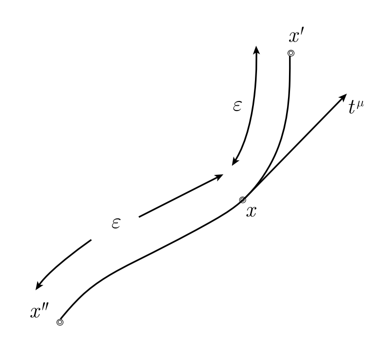


图 7.5　平行移动示意图

ε 是 x 到 x' 及 x 到 x'' 的固有距离，t^μ 是测地线在 x 点处的切矢

首先在二维情况下，把 $G^{(1)}(x',x'')$ 重写成 $G^{(1)}(\varepsilon,t^\mu)$，其中 ε 是 x 到 x' 及 x 到 x'' 的固有距离，t^μ 是测地线在 x 点处的切矢。因为二维时空是共形平直的，度

① 并不是 $T_{\mu\nu}(x,x')$ 的每一项都是双矢量，例如，$\nabla_\mu\nabla_\nu\phi(x)\phi(x')$ 是一个张量与一个标量的乘积，而不是双矢量。

规取如下形式

$$\mathrm{d}s^2 = C^2(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{7.4.34}$$

二维平直时空度规为

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{M}}^2 = \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2, \tag{7.4.35}$$

式中，$u = t - x$，$v = t + x$。用类光坐标来标记 x'，x'' 和 x 就有

$$x' = (u(\epsilon), v(\epsilon)), \qquad x'' = (u(-\epsilon), v(-\epsilon)), \qquad x = (u,v)。 \tag{7.4.36}$$

依定义

$$t^\mu = (t^u,\ t^v) = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varepsilon},\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varepsilon}\right),$$

及

$$g_{\mu\nu}t^\mu t^\nu = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon = \begin{cases} s & (\text{类时间隔}) \\ \mathrm{i}s & (\text{类空间隔}) \end{cases}。$$

在测地线上任一点的切矢满足

$$\frac{\mathrm{d}t^\mu(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(\varepsilon)t^\nu(\varepsilon)t^\sigma(\varepsilon) = 0,$$

按 ε 展开

$$t^\mu(\varepsilon) = t^\mu(0) + \varepsilon t_2^\mu + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t_3^\mu$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x_\varepsilon) = \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(0) + \varepsilon\Gamma^\mu_{\nu\lambda,\sigma}t^\sigma,$$

令 ε 的每一阶相等，求出 t_2^μ 和 t_3^μ, 再对 ε 积分，得到

$$\begin{aligned} u(\epsilon) = & u + \epsilon t^u - C^{-1}C_{,u}(t^u)^2\epsilon^2 \\ & + \frac{1}{3}C^2\left[C^{-4}(5C_{,u}{}^2 - CC_{,uu})t^u - \frac{1}{8}Rt^v\right](t^u)^2\epsilon^3 + \cdots, \end{aligned} \tag{7.4.37}$$

$$\begin{aligned} v(\epsilon) = & v + \epsilon t^v - C^{-1}C_{,v}(t^v)^2\epsilon^2 \\ & + \frac{1}{3}C^2\left[C^{-4}(5C_{,v}{}^2 - CC_{,vv})t^v - \frac{1}{8}Rt^u\right](t^v)^2\epsilon^3 + \cdots。 \end{aligned} \tag{7.4.38}$$

$G_{\mathrm{DS}}^{(1)}(\varepsilon, t^\mu)$ 的前几项中与 ε^{-2} 无关的部分为

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{DS}}^{(1)}(\varepsilon, t^\mu) = & -\frac{1}{\pi}\left[1 - (m^2 + \xi R)\varepsilon^2\Sigma\right]\left(\gamma + \frac{1}{2}\ln|m^2\varepsilon^2|\right) \\ & -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{6}\right)m^{-2}R + \varepsilon^2\Sigma\left[m^2 + \frac{1}{2}(\xi - \frac{1}{6})R\right]\right\} \\ & + O(\varepsilon^2T^{-2}) + O(\varepsilon^4) + O(T^{-4}), \end{aligned} \tag{7.4.39}$$

式中，$O(T^{-p})$ 表示绝热阶为 p 的项，γ 是欧拉常数，对于类时间隔 $\Sigma=1$，对于类空间隔 $\Sigma=-1$。如前所述，求出 $G^{(1)}$，并从中减去式 (7.4.39) 得到重整化的 $G^{(1)}_{\rm ren}$，其结果可写成

$$\begin{aligned}G^{(1)}_{\rm ren}(\varepsilon,t^{\mu})=&c+\varepsilon^2\Sigma\left[\mathrm{e}_{\alpha\beta}\frac{t^{\alpha}t^{\beta}}{\Sigma}+f\right]\\&+\varepsilon^2\Sigma\left[q_{\alpha\beta}\frac{t^{\alpha}t^{\beta}}{\Sigma}+r\right]\left(\gamma+\frac{1}{2}\ln|m^2\varepsilon^2|\right),\end{aligned}\tag{7.4.40}$$

式中，c，f，r，$\mathrm{e}_{\alpha\beta}$，$q_{\alpha\beta}$ 是 x 的函数。需注意，在 ε 趋于零时，它虽然是有限的，但我们仍暂不取 $\varepsilon\to 0$ 的极限，而先微分 $G^{(1)}_{\rm ren}(\varepsilon,t^{\mu})$ 以得到 $<0|T_{\mu\nu}(x',x'')|0>_{\rm ren}$，然后再取 $\varepsilon\to 0$ 的极限，得到

$$\begin{aligned}\langle T_{\mu\nu}\rangle=&\left(\frac{1}{2}-\xi\right)T^{(1)}_{\mu\nu}+\left(\xi-\frac{1}{4}\right)g_{\mu\nu}T^{(1)\alpha}_{\alpha}+\xi T^{(2)}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\xi g_{\mu\nu}T^{(2)\alpha}_{\alpha}\\&-\frac{1}{2}c\xi\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\xi Rg_{\mu\nu}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\xi\right)m^2g_{\mu\nu}c,\end{aligned}\tag{7.4.41}$$

其中

$$\begin{aligned}T^{(1)}_{\mu\nu}(x)=&\lim_{x',x''\to x}\langle 0|\{\phi_{;\mu}(x'),\phi_{;\nu}(x'')\}|0\rangle\\=&-\frac{1}{2}(q_{\mu\nu}+rg_{\mu\nu})\left(\gamma+\frac{1}{2}\ln|m^2\varepsilon^2|\right)-\frac{1}{4}(rg_{\mu\nu}-c_{;\mu\nu})-\frac{1}{2}(e_{\mu\nu}+fg_{\mu\nu})\\T^{(2)}_{\mu\nu}(x)=&-\lim_{x',x''\to x}\langle 0|\{\phi,\phi_{;\mu\nu}\}|0\rangle=T^{(1)}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}c_{;\mu\nu}。\end{aligned}\tag{7.4.42}$$

在共形耦合 (也是最小耦合) 标量场的情况，$\xi=\xi(2)=0$，

$$\langle T\rangle=\frac{1}{2}m^2c。\tag{7.4.43}$$

注意，这里的 c 与光速无关，也与共形因子 C 无关，它是式 (7.4.40) 中引入的 x 的函数。

再看 4 维弗里德曼–罗伯逊–沃克度规情况

$$\mathrm{d}s^2=C^2(\eta)\Big(\mathrm{d}\eta^2-\Upsilon\mathrm{d}r^2-r^2\mathrm{d}\Omega^2\Big),\tag{7.4.44}$$

式中 $\Upsilon=(1-\mathrm{k}r^2)^{-1}$。类似地，可将切矢量按 ε 展开[63, 64]

$$\begin{aligned}\eta(\varepsilon)=&\eta+\varepsilon t^{\eta}+\frac{1}{2!}\varepsilon^2t^{\eta}_2+\frac{1}{3!}\varepsilon^3t^{\eta}_3+\frac{1}{4!}\varepsilon^4t^{\eta}_4+\cdots,\\r(\varepsilon)=&r+\varepsilon t^{r}+\frac{1}{2!}\varepsilon^2t^{r}_2+\frac{1}{3!}\varepsilon^3t^{r}_3+\frac{1}{4!}\varepsilon^4t^{r}_4+\cdots,\end{aligned}\tag{7.4.45}$$

式中

$$
\begin{aligned}
t_2^\eta =& -D(t^\eta)^2 - D\varUpsilon(t^r)^2,\\
t_2^r =& -2Dt^\eta t^r - \mathrm{k}r\varUpsilon(t^r)^2,\\
t_3^\eta =& (-\dot{D}+2D^2)(t^\eta)^3 + (-\dot{D}+6D^2)\varUpsilon t^\eta(t^r)^2,\\
t_3^r =& (-2\dot{D}+6D^2)(t^\eta)^2t^r + 6D\mathrm{k}\varUpsilon t^\eta(t^r)^2 + (2D^2-\mathrm{k})\varUpsilon(t^r)^3,\\
t_4^\eta =& (-\ddot{D}+7D\dot{D}-6D^3)(t^\eta)^4 + (-\ddot{D}+20\dot{D}D-36D^3)\varUpsilon(t^rt^\eta)^2\\
&+(\dot{D}D-6D^3)\varUpsilon(t^r)^4,\\
t_4^r =& (-2\ddot{D}+20D\dot{D}-24D^3)(t^\eta)^3t^r + (8\dot{D}\mathrm{k}r-36D^2\mathrm{k}r)\varUpsilon(t^\eta t^r)^2\\
&+(8D\dot{D}-24D^3+12D\mathrm{k})\varUpsilon t^\eta(t^r)^3 + (-8D^2\mathrm{k}r+\mathrm{k}^2r)\varUpsilon^2(t^r)^4,\\
t_5^\eta =& (-\dddot{D}+11D\ddot{D}+7\dot{D}^2-46\dot{D}D^2+24D^4)(t^\eta)^5\\
&+(-\dddot{D}+30\ddot{D}D+20\dot{D}^2-256\dot{D}D^2+120D^4)\varUpsilon(t^r)^2(t^\eta)^3\\
&+(3\ddot{D}D+\dot{D}^2-66\dot{D}D^2+120D^4)\varUpsilon^2t^\eta(t^r)^4,\\
t_5^r =& (-2\dddot{D}+30\ddot{D}D+30\dot{D}^2-172\dot{D}D^2+120D^4)(t^\eta)^4t^r\\
&+(10\ddot{D}\mathrm{k}r-140D\dot{D}\mathrm{k}r+240D^3\mathrm{k}r)\varUpsilon(t^\eta)^3(t^r)^2\\
&+(14\ddot{D}D+8\dot{D}^2-188\dot{D}D^2+240D^4+20\dot{D}\mathrm{k}-120D^2\mathrm{k})\varUpsilon(t^\eta)^2(t^r)^3\\
&+(-40\dot{D}D\mathrm{k}r+160D^3\mathrm{k}r-20D\mathrm{k}^2r)\varUpsilon^2t^\eta(t^r)^4\\
&+(-8\dot{D}D^2+24D^4-20D^2\mathrm{k}+\mathrm{k}^2)\varUpsilon^2(t^r)^5。
\end{aligned}
\tag{7.4.46}
$$

阿达玛基本函数的 DS 展开的前几项为

$$
\begin{aligned}
G_{\mathrm{DS}}^{(1)}(\varepsilon,t^\mu) =& -\frac{1}{8\pi^2\varepsilon^2\varSigma} + \frac{m^2+\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R}{4\pi^2}\left(\gamma+\frac{1}{2}\ln m^2\varepsilon^2|\right)\\
&+\frac{1}{24\pi^2}R_{\alpha\beta}\frac{t^\alpha t^\beta}{\varSigma} - \frac{m^2}{8\pi^2} + \frac{\varepsilon^2\varSigma}{24\pi^2}\left(\gamma+\frac{1}{2}\ln|m^2\varepsilon^2|\right)\Big\{-3m^4\\
&-2m^2R_{\alpha\beta}\frac{t^\alpha t^\beta}{\varSigma} - 6\left(\xi-\frac{1}{6}\right)m^2R + \left(\xi-\frac{1}{6}\right)\Big[-2RR_{\alpha\beta}\frac{t^\alpha t^\beta}{\varSigma}\\
&+R_{;\alpha\beta}\frac{t^\alpha t^\beta}{\varSigma} - \Box R - 3\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R^2\Big]\Big\} + \frac{\varepsilon^2\varSigma}{1440\pi^2}\Big[225m^4\\
&+360m^2\left(\xi-\frac{1}{6}\right)R + 60m^2R_{\alpha\beta}\frac{t^\alpha t^\beta}{\varSigma} + 6R_{\alpha\beta;\gamma\delta}\frac{t^\alpha t^\beta t^\gamma t^\delta}{\varSigma^2}\\
&-14R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}\frac{t^\alpha t^\beta t^\gamma t^\delta}{\varSigma^2} - 4R_{\alpha\rho}R^\rho_\beta\frac{t^\alpha t^\beta}{\varSigma} - \frac{4}{3}RR_{\alpha\beta}\frac{t^\alpha t^\beta}{\varSigma}\\
&-\Box R - R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}R^2 + 30\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\Box R + 90\left(\xi-\frac{1}{6}\right)^2R^2\Big]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{1440\pi^2 m^2}\left[R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}-\frac{1}{3}R^2-\Box R+30\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\Box R\right.$$
$$\left.+90\left(\xi-\frac{1}{6}\right)^2 R^2\right]+O(\varepsilon^4)+O(T^{-6})。\tag{7.4.47}$$

重整化的阿达玛基本函数仍可写成式 (7.4.40)，对它微分以得到 $\langle 0|T_{\mu\nu}(x',x'')|0\rangle_{\rm ren}$。当 $\sigma\to 0$ 时得到的应力张量是

$$\begin{aligned}\langle T_{\mu\nu}\rangle=&\left(\frac{1}{2}-\xi\right)T^{(1)}_{\mu\nu}+\left[\frac{3}{4}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)\right]g_{\mu\nu}T^{(1)\alpha}_{\alpha}\\&+\xi T^{(2)}_{\mu\nu}-\frac{1}{4}T^{(2)\alpha}_{\alpha}-\frac{1}{2}c\xi\left[R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\frac{1}{4}Rg_{\mu\nu}\right.\\&\left.+\frac{3}{2}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)Rg_{\mu\nu}\right]+\left[\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\left(\xi-\frac{1}{6}\right)\right]m^2g_{\mu\nu}c,\end{aligned}\tag{7.4.48}$$

其中 $T^{(1)}$ 和 $T^{(2)}$ 仍由式 (7.4.42) 给出。在共形耦合标量场的情况，$\xi=\dfrac{1}{6}$，再次有

$$\langle T\rangle=\frac{1}{2}m^2c。$$

第 8 章　相互作用场

到目前为止，我们只是考虑了弯曲时空中自由场的量子理论，本章将讨论物质场的自相互作用和不同物质场间的 (非引力) 相互作用。本章将重点回答以下 3 个问题:

(1) 当时空具有非平凡的拓扑和曲率时，在闵可夫斯基时空中可重整的场论仍然可重整吗？

(2) 在多大程度上，相互作用能够超越自由场情况，促进或抑制粒子的引力产生？

(3) 如果物质场有相互作用，霍金辐射还是精确的热辐射吗？

弗里德曼 (D. Z. Freedman) 和皮 (Pi) 证明，任何在平直时空中可重整的场论 (如 QED、Y-M 场论、$\lambda\phi^4$ 场等), 在弯曲时空中也可重整的 [65]。在本章第 8.1 节，我们将讨论弯曲时空对 S 矩阵元的影响，我们将以 $\lambda\phi^4$ 场为例说明 S 矩阵元只与相互作用有关，时空的弯曲效应只通过 $g_{\mu\nu}$ 进入 S 的表达式。在第 8.2 节、8.3 节，我们将讨论弯曲时空中相互作用物质场的重整化问题。在 8.4 节以 $\lambda\phi^4$ 场为例讨论粒子产生问题。

8.1　S 矩阵元的计算

设

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_I\,, \tag{8.1.1}$$

并且假定

$$\lim_{x^0\to-\infty}\phi(x) = \phi^{\text{in}}(x) \tag{8.1.2}$$

$$\lim_{x^0\to+\infty}\phi(x) = \phi^{\text{out}}(x)\,。$$

我们可以在入射区和出射区分别定义正频模解

$$u_i^{\text{in}}(x),\quad u_i^{\text{out}}(x),$$

于是, ϕ^{in} 和 ϕ^{out} 可以展开为

$$\begin{aligned}\phi^{\text{in}}(x) &= \sum_i \left(a_i^{\text{in}} u_i^{\text{in}}(x) + a_i^{\text{in}\dagger} u_i^{\text{in}*}(x)\right)\\ &= \sum_i \left(\bar{a}_i^{\text{in}} u_i^{\text{out}}(x) + \bar{a}_i^{\text{in}\dagger} u_i^{\text{out}*}(x)\right), \end{aligned} \tag{8.1.3}$$

$$\begin{aligned}\phi^{\text{out}}(x) &= \sum_i \left(a_i^{\text{out}} u_i^{\text{in}}(x) + a_i^{\text{out}\dagger} u_i^{\text{in}*}(x)\right)\\ &= \sum_i \left(\bar{a}_i^{\text{out}} u_i^{\text{out}}(x) + \bar{a}_i^{\text{out}\dagger} u_i^{\text{out}*}(x)\right), \end{aligned} \tag{8.1.4}$$

我们可以用下面方式定义 4 种真空

$$\begin{cases} a_i^{\text{in}}|0\rangle_{\text{in}} = 0, & \forall i\\ \bar{a}_i^{\text{in}}|\bar{0}\rangle_{\text{in}} = 0, & \forall i\\ a_i^{\text{out}}|0\rangle_{\text{out}} = 0, & \forall i\\ \bar{a}_i^{\text{out}}|\bar{0}\rangle_{\text{out}} = 0, & \forall i \end{cases}$$

和相应的福克空间。它们之间的关系是

$$\begin{array}{ll} \text{博戈留波夫变换:} & |0\rangle_{\text{in}} \Leftrightarrow |\bar{0}\rangle_{\text{in}}\,,\\ \text{博戈留波夫变换:} & |0\rangle_{\text{out}} \Leftrightarrow |\bar{0}\rangle_{\text{out}}\,,\\ \text{相互作用:} & |0\rangle_{\text{in}} \Rightarrow |0\rangle_{\text{out}},\ |0\rangle_{\text{out}} = S|0\rangle_{\text{in}}\,,\\ \text{相互作用:} & |\bar{0}\rangle_{\text{in}} \Rightarrow |\bar{0}\rangle_{\text{out}},\ |\bar{0}\rangle_{\text{out}} = S|\bar{0}\rangle_{\text{in}}\,,\\ \text{相互作用和博戈留波夫变换:} & |0\rangle_{\text{in}} \Rightarrow |\bar{0}\rangle_{\text{out}} \end{array} \tag{8.1.5}$$

考虑入射区的福克空间

$$|0\rangle_{\text{in}},\quad |n\rangle_{\text{in}}$$

和出射区的福克空间

$$|\bar{0}\rangle_{\text{out}},\quad |\bar{m}\rangle_{\text{out}}\,,$$

其中，$|n\rangle_{\text{in}}$ 和 $|\bar{m}\rangle_{\text{out}}$ 是

$$\begin{aligned}|n\rangle_{\text{in}} &= |{}^1n_{i_1}, {}^2n_{i_2}, \cdots\rangle_{\text{in}},\\ |\bar{m}\rangle_{\text{out}} &= |{}^1\bar{m}_{j_1}, {}^2\bar{m}_{j_2}, \cdots\rangle_{\text{out}}\end{aligned}$$

的缩写，${}^1n_{i_1}$ 表示具有量子数 i_1 的粒子有 ${}^1n_{i_1}$ 个，而

$$|{}^1n_{i_1}\rangle = ({}^1n_{i_1})^{-1/2}|\underbrace{1_{i_1}, 1_{i_1}, \cdots, 1_{i_1}}_{{}^1n_{i_1}\text{个}}\rangle\,。$$

从入射态 $|n\rangle_{\rm in}$ 到出射态 $|\bar{m}\rangle_{\rm out}$ 变换矩阵元或 S 矩阵元是

$$
{}_{\rm out}\langle\bar{m}|n\rangle_{\rm in}={}_{\rm in}\langle\bar{m}|S|n\rangle_{\rm in}\,, \tag{8.1.6}
$$

其跃迁几率是

$$
|{}_{\rm out}\langle\bar{m}|n\rangle_{\rm in}|^2\,。 \tag{8.1.7}
$$

在弯曲时空中，式 (8.1.6) 及式 (8.1.7) 不仅依赖于物质场的相互作用, 也依赖于时空的几何，这就使问题变得复杂了。为区分这两种效应，我们利用福克空间的完备性，可将式 (8.1.6) 左边改写为

$$
{}_{\rm out}\langle\bar{m}|n\rangle_{\rm in}=\sum_I {}_{\rm out}\langle\bar{m}|I\rangle_{\rm out}\;{}_{\rm out}\langle I|n\rangle_{\rm in}, \tag{8.1.8}
$$

式中，一个 $|I\rangle_{\rm out}$ 代表一个形如

$$
(k!)^{-1/2}|1_{j_1},1_{j_2},\cdots,1_{j_k}\rangle_{\rm out}
$$

的态, 对 I 求和意味着对 k 从 0 到 ∞ 求和。这样改写后，振幅 ${}_{\rm out}\langle\bar{m}|I\rangle_{\rm out}$ 仅由博戈留波夫系数决定，与相互作用无关；振幅 ${}_{\rm out}\langle I|n\rangle_{\rm in}$ 仅由相互作用决定, 与博戈留波夫变换无关。

我们可用莱曼–塞曼则克–齐默尔曼 (Lehmann-Symanzik-Zimmermann, LSZ) 方法[66, 67] 来计算后者，即用把 S 矩阵元约化到格林函数的方法来计算。仿照文献 [68] 中的方程 (16.81), 可得

$$
\begin{aligned}
\frac{{}_{\rm out}\langle I_p|I_q\rangle_{\rm in}}{{}_{\rm out}\langle 0|0\rangle_{\rm in}}={}&{\rm i}^{k+l}\prod^{k}\prod^{l}\int {\rm d}^n x(-g(x))^{\frac{1}{2}}\int {\rm d}^n y(-g(y))^{\frac{1}{2}}u_q(x)u_p^*(y)\\
&\times[\Box_x+m^2+\xi R(x)][\Box_y+m^2+\xi R(y)]\tau(y,x),(p\neq q),
\end{aligned} \tag{8.1.9}
$$

式中, p, y 和 q, x 分别代表两组粒子的动量和位置 $(p_1,p_2,\cdots,p_k)$, $(y_1,y_2,\cdots,y_k)$ 及 $(q_1,q_2,\cdots,q_l)$, $(x_1,x_2,\cdots,x_l)$

$$
\tau(y,x)=\frac{{}_{\rm out}\langle 0|T(\phi(y_1)\phi(y_2)\cdots\phi(y_k)\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_l))|0\rangle_{\rm in}}{{}_{\rm out}\langle 0|0\rangle_{\rm in}} \tag{8.1.10}
$$

是多点格林函数，它能用下面的路径积分方法来计算。

格林函数的生成泛函是

$$
Z[J]=\int\mathscr{D}[\phi]\exp\left\{{\rm i}\int\mathscr{L}_I(\phi)\sqrt{-g}{\rm d}^n x\right\}\exp\left\{{\rm i}\int[\mathscr{L}_0(\phi)+J\phi]\sqrt{-g}{\rm d}^n x\right\}, \tag{8.1.11}
$$

如果 $\mathscr{L}_I$ 是一个场函数的多项式，则可把 $Z(J)$ 重写为

$$Z[J]=\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathscr{L}_I(\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta J})\sqrt{-g}\mathrm{d}^n x\right\}\int \mathscr{D}[\phi]\exp\left\{\mathrm{i}\int[\mathscr{L}_0(\phi)+J\phi]\sqrt{-g}\mathrm{d}^n x\right\}$$
$$=\exp\left[\mathrm{i}\int \mathscr{L}_I\left(\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta J}\right)\sqrt{-g}\mathrm{d}^n x\right]Z_0[J]\,, \tag{8.1.12}$$

对于标量场

$$Z_0[J]\sim[\det(-G_{\mathrm{F}})]^{\frac{1}{2}}$$
$$\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{i}\int\sqrt{-g(x)}\sqrt{-g(y)}\mathrm{d}^n x\mathrm{d}^n yJ(x)G_{\mathrm{F}}(x,y)J(y)\right], \tag{5.1.37}$$

所以

$$Z[J]\propto[\det(-G_{\mathrm{F}})]^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathscr{L}_I\left(\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta J}\right)\sqrt{-g(x)}\mathrm{d}^n x\right\}$$
$$\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{i}\int\sqrt{-g(x)}\sqrt{-g(y)}\mathrm{d}^n y\mathrm{d}^n zJ(y)G_{\mathrm{F}}(y,z)J(z)\right]。 \tag{8.1.13}$$

由于 m 点连通格林函数为

$$\tau_{\mathrm{c}}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\frac{(-1)^m}{[g(x_1)\cdots g(x_m)]^{1/2}}\left[\frac{\delta^m\ln Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_m)}\right]_{J=0}, \tag{8.1.14}$$

其中, 角标 c 表示只计及连通费曼图。

对于 $\lambda\phi^4$ 场

$$\mathscr{L}_I=-\frac{1}{4!}\lambda\phi^4\,, \tag{8.1.15}$$

考虑到从 $|0\rangle_{\mathrm{in}}$ 到 $|\bar{m}\rangle_{\mathrm{out}}$ 的特殊散射，则有

$${}_{\mathrm{out}}\langle\bar{m}|0\rangle_{\mathrm{in}}=\sum_I {}_{\mathrm{out}}\langle\bar{m}|I\rangle_{\mathrm{out}}\ {}_{\mathrm{out}}\langle I|0\rangle_{\mathrm{in}}\,, \tag{8.1.16}$$

式中的第一个振幅由博戈留波夫系数决定，并且是有限的。第二个振幅可用 LSZ 方法的约化公式计算。例如

$$\frac{{}_{\mathrm{out}}\langle 1_{p_1},1_{p_2}|0\rangle_{\mathrm{in}}}{{}_{\mathrm{out}}\langle 0|0\rangle_{\mathrm{in}}}=\int\mathrm{d}^n y_1\mathrm{d}^n y_2[-g(y_1)]^{\frac{1}{2}}[-g(y_2)]^{\frac{1}{2}}u^*_{p_1}(y_1)u^*_{p_2}(y_2)$$
$$\times\mathrm{i}[\Box_{y_1}+m^2+\xi R(y_1)]\cdot\mathrm{i}[\Box_{y_2}+m^2+\xi R(y_2)]\tau(y_1,y_2)\,, \tag{8.1.17}$$

对于连通费曼图

$$\begin{aligned}\tau_{\mathrm{c}}(y_1,y_2)=&\frac{1}{(g(y_1)g(y_2))^{1/2}}\left.\frac{\delta^2\ln Z[J]}{\delta J(y_1)\delta J(y_2)}\right|_{J=0}\\=&\mathrm{i}G_{\mathrm{F}}(y_1,y_2)-\frac{1}{2}\lambda\int G_{\mathrm{F}}(y_1,x)G_{\mathrm{F}}(x,x)G_{\mathrm{F}}(x,y_2)(-g(x))^{1/2}\mathrm{d}^n x\\&+\cdots,\end{aligned}\tag{8.1.18}$$

它称为完全连通传播子 (图 8.1)。对 τ 的非连通部分可由连通部分组合得到，它只改变振幅的大小，而不改变 S 矩阵的形式，故此后不再讨论它们。当精确到 λ 的一级时，式 (8.1.18) 中 $\cdots$ 的项都可略去。

图 8.1　$\tau_{\mathrm{c}}(y_1,y_2)$ 的费曼图

令

$$\gamma_{\mathrm{c}}(y_1,y_2)=\mathrm{i}[\Box_{y_1}+m^2+\xi R(y_1)]\cdot\mathrm{i}[\Box_{y_2}+m^2+\xi R(y_2)]\tau_{\mathrm{c}}(y_1,y_2)\,,\tag{8.1.19}$$

从式 (8.1.18) 得到

$$\gamma_{\mathrm{c}}(y_1,y_2)=\mathrm{i}K_{y_1y_2}+\frac{1}{2}\lambda G_{\mathrm{F}}(y_1,y_1)\delta^n(y_1,y_2)\,,\tag{8.1.20}$$

式中

$$\begin{aligned}[\Box_x+m^2+\xi R(x)]G_{\mathrm{F}}(x,x')=-\delta^n(x,x')\,,\\K_{xy}\equiv[\Box_x+m^2-\mathrm{i}\varepsilon+\xi R]\delta^n(x,y)\,,\end{aligned}\tag{8.1.21}$$

或

$$[\Box_x+m^2-\mathrm{i}\varepsilon+\xi R]K^{-1}_{xy}=\delta^n(x,y)\,。\tag{8.1.22}$$

当 $\lambda\to0$，$\tau_{\mathrm{c}}\to\mathrm{i}G_{\mathrm{F}}$。$\gamma_{\mathrm{c}}(y_1,\ y_2)$ 的费曼图可通过截断外腿从 τ_{c} 的费曼图得到，所以 $\gamma_{\mathrm{c}}(y_1,\ y_2)$ 称为截腿格林函数。从式 (8.1.18) 和式 (8.1.17)，最后得到 S 矩阵元

$$\begin{aligned}\frac{{}_{\mathrm{out}}\langle1_{p_1},1_{p_2}|0\rangle_{\mathrm{in}}}{{}_{\mathrm{out}}\langle0|0\rangle_{\mathrm{in}}}=&\frac{1}{2}\lambda\int u^*_{p_1}(y)u^*_{p_2}(y)G_{\mathrm{F}}(y,y)(-g(y))^{1/2}\mathrm{d}^n y\\&+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^n y_1\mathrm{d}^n y_2(-g(y_1))^{1/2}(-g(y_2))^{1/2}u^*_{p_1}(y_1)K_{y_1y_2}u^*_{p_2}(y_2)\\=&\frac{1}{2}\lambda\int u^*_{p_1}(y)u^*_{p_2}(y)G_{\mathrm{F}}(y,y)(-g(y))^{1/2}\mathrm{d}^n y\,,\end{aligned}\tag{8.1.23}$$

注意到 $u_p(y)$ 是一个自由模函数，第一等号右边第二项是零。显然，在没有相互作用 $(\lambda=0)$ 时，它等于零。这再次显示，S 矩阵元仅与相互作用有关，而时空弯曲的效应只通过 $g_{\mu\nu}$ 进入 S 矩阵元的表达式 (8.1.23)。

8.2 重 整 化

我们来考虑维数正规化。由式 (5.2.29) 知

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{F}}(y,y) &= -\frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^{n/2}}\sum_{j=0}^{\infty}(m^2)^{\frac{n}{2}-j-1}a_j(y)\Gamma\left(j-\frac{1}{2}n+1\right) \\ &\xrightarrow{n\to 4} -\frac{2\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\cdot\frac{m^2+\left(\xi-\dfrac{1}{6}\right)R}{n-4}+G_{\mathrm{F}}^{\mathrm{finite}}(y,y)\,, \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

即当 $n\to 4$ 时, 它是发散的，但是只有两个极点项，其中之一由质量引起，另一个由曲率标量引起，后一项在闵可夫斯基时空中不出现。

对于 $\lambda\phi^4$ 场，我们分别引进了裸的和重整化的量 m,ξ,ϕ,λ 和 $m_R,\xi_R,\phi_R,\lambda_R$，并令

$$\begin{aligned} &m_R^2=m^2-\delta m^2, &&\xi_R=\xi-\delta\xi\,, \\ &\phi_R=Z^{-1/2}\phi, &&\lambda_R=\lambda-\delta\lambda\,, \end{aligned} \tag{8.2.2}$$

这里补偿常数应展开为 $(n-4)^{-1}$ 的级数，即假定

$$\delta m^2=m_R^2\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu(\lambda_R)(n-4)^{-\nu},\quad b_\nu(\lambda_R)=\sum_{j=\nu}^{\infty}b_{\nu j}\lambda_R^j, \tag{8.2.3}$$

$$\delta\xi=\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu(\lambda_R)(n-4)^{-\nu},\qquad d_\nu(\lambda_R)=\sum_{j=\nu}^{\infty}d_{\nu j}\lambda_R^j, \tag{8.2.4}$$

$$\lambda\to\mu^{n-4}\lambda\,,$$

或

$$\begin{aligned} \lambda&=\mu^{n-4}(\lambda_R+\delta\lambda) \\ &=\mu^{n-4}\Big[\lambda_R+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(\lambda_R)(n-4)^{-\nu}\Big],\ a_\nu(\lambda_R)=\sum_{j=\nu}^{\infty}a_{\nu j}\lambda_R^j\,, \end{aligned} \tag{8.2.5}$$

$$Z=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu(\lambda_R)(n-4)^{-\nu},\qquad c_\nu(\lambda_R)=\sum_{j=\nu}^{\infty}c_{\nu j}\lambda_R^j\,, \tag{8.2.6}$$

式中，μ 是一个质量标度的量，引进来以保持总作用量无量纲，或保持拉氏量的量纲为 L^{-n}，这就是重整化群方法中的特 · 胡夫特 ('t Hooft) 方法[69]。所以，拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - (m^2+\xi R)\phi^2\right] - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 \\ &= \frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - (m_R^2+\xi_R R)\phi^2\right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{4!}\lambda\phi^4 + \frac{1}{2}(\delta m^2 + \delta\xi R)\phi^2\right] \\ &\equiv \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_I\,, \end{aligned} \tag{8.2.7}$$

式中

$$\mathscr{L}_I = -\left[\frac{1}{4!}\lambda\phi^4 + \frac{1}{2}(\delta m^2 + \delta\xi R)\phi^2\right]\text{。} \tag{8.2.8}$$

注意，我们只用了质量 m 和耦合常数 ξ 的重整化，在我们的讨论中这已经足够。如果我们在泛函微分中使用此 $\mathscr{L}_I$ 以得到 τ_{c} 和 γ_{c}，将发现

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathrm{c}}(y_1,y_2) = \mathrm{i}K_{y_1y_2} &+ \lambda_R\left\{\frac{1}{2}\mu^{4-n}G_{\mathrm{F}}(y_1,y_2)\right. \\ &\left. - \mathrm{i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[m_R^2 b_{\nu 1} + d_{\nu 1}R(y_1)\right](n-4)^{-\nu}\right\}\delta^n(y_1,y_2) \\ &+ O(\lambda_R^2)\,, \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

在式 (8.2.1) 中用 m_R 和 ξ_R 分别取代 m 和 ξ 后，把它代入式 (8.2.9)，将看到 γ_{c} 中所有的极点项会被如下的选择所消除

$$\begin{cases} c_\nu = 0, & \forall\nu, \\ d_\nu = b_\nu = 0, & \forall\nu \neq 1, \\ b_1 = -\dfrac{1}{16\pi^2}, \quad d_1 = -\dfrac{1}{16\pi^2}\left(\xi_R - \dfrac{1}{6}\right), & \\ a_\nu = 0, & \forall\nu\text{。} \end{cases} \tag{8.2.10}$$

最后我们得到弯曲时空背景下 $\lambda\phi^4$ 场单圈近似下的重整化后的约化公式或 S 矩阵元

$$\begin{aligned}\left[\frac{\langle \mathrm{out}, 1_{p_1}, 1_{p_2}|0\rangle_{\mathrm{in}}}{{}_{\mathrm{out}}\langle 0|0\rangle_{\mathrm{in}}}\right]_{\mathrm{ren}} = \frac{1}{2}\lambda_R\int (-g(y))^{1/2}\mathrm{d}^4 y u_{p_1}^*(y)u_{p_2}^*(y)\left\{G_{\mathrm{F}}^{\mathrm{finite}}(y,y)\right. \\ \left. + \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\left[m_R^2 + \left(\xi_R - \frac{1}{6}\right)R(y)\right]\ln\mu\right\}\text{。}\end{aligned} \tag{8.2.11}$$

证明：

为写出单圈近似下重整化的 S 矩阵元, 把式 (8.2.1)G_{F} 代入式 (8.2.9)，进而代入对连通图的式 (8.1.17), 不要忘记包含 $K_{y_1y_2}$ 项的贡献为零, 且要用 Z 乘各项，再

注意到当 $n\to 4$ 时, $\mu^{4-n}\to 1$，则

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{{}_{\text{out}}\langle 1_{p_1},1_{p_2}|0\rangle_{\text{in}}}{{}_{\text{out}}\langle 0|0\rangle_{\text{in}}}\right]_{\text{ren}}\\
=&\int[-g(y_1)]^{1/2}\mathrm{d}^n y_1[-g(y_2)]^{1/2}\mathrm{d}^n y_2 u_{p_1}^*(y_1)u_{p_2}^*(y_2)\\
&\times\lambda_R\left\{\frac{1}{2}\mu^{4-n}\left[-\frac{2\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\frac{m_R^2+\left(\xi_R-\frac{1}{6}\right)R}{n-4}+G_{\mathrm{F}}^{\text{finite}}\right]\right.\\
&\left.-\mathrm{i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[m_R^2 b_\nu+d_\nu R(y_1)\right](n-4)^{-\nu}\right\}\delta^n(y_1,y_2)\\
=&\int\mathrm{d}^n y[-g(y)]^{1/2}u_{p_1}^*(y)u_{p_2}^*(y)\lambda_R\left\{\frac{1}{2}[1+(4-n)\ln\mu+\cdots]\right.\\
&\left.\times\left[-\frac{2\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\frac{m_R^2+\left(\xi_R-\frac{1}{6}\right)R}{n-4}+G_{\mathrm{F}}^{\text{finite}}\right]-\mathrm{i}\sum_{\nu=1}^{\infty}[m_R^2 b_\nu+d_\nu R(y)](n-4)^{-\nu}\right\}\\
=&\int\mathrm{d}^n y[-g(y)]^{1/2}u_{p_1}^*(y)u_{p_2}^*(y)\lambda_R\left\{-\frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\frac{m_R^2+\left(\xi_R-\frac{1}{6}\right)R}{n-4}\right.\\
&+\frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\frac{m_R^2+\left(\xi_R-\frac{1}{6}\right)R}{1}\ln\mu+\frac{1}{2}[1+(4-n)\ln\mu+\cdots]G_{\mathrm{F}}^{\text{finite}}\\
&\left.-\mathrm{i}\sum_{\nu=1}^{\infty}[m_R^2 b_\nu+d_\nu R(y)](n-4)^{-\nu}\right\}\\
\to&\frac{1}{2}\lambda_R\int\mathrm{d}^4 y[-g(y)]^{1/2}u_{p_1}^*(y)u_{p_2}^*(y)\left\{G_{\mathrm{F}}^{\text{finite}}+\frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\left[m_R^2+\left(\xi_R-\frac{1}{6}\right)R\right]\ln\mu\right.\\
&\left.+\lim_{n\to 4}\left[\frac{-\mathrm{i}}{8\pi^2}\frac{(m_R^2+\left(\xi_R-\frac{1}{6}\right)R}{n-4}-2\mathrm{i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{m_R^2 b_\nu+d_\nu R(y)}{(n-4)^\nu}\right]\right\},
\end{aligned}\tag{8.2.12}
$$

为消去极点，即

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mathrm{i}}{16\pi^2}\frac{m_R^2}{n-4}-\frac{\mathrm{i}}{n-4}m_R^2 b_1=0,\\
&-\frac{\mathrm{i}}{16\pi^2}\frac{\xi_R-\frac{1}{6}}{n-4}R-\frac{\mathrm{i}}{n-4}d_1 R=0,
\end{aligned}\tag{8.2.13}
$$

我们得到

$$b_1 = -\frac{1}{16\pi^2}, \qquad d_1 = -\frac{1}{16\pi^2}\left(\xi_R - \frac{1}{6}\right), \tag{8.2.14}$$

其他 $a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu$ 全为零。证毕。

8.3 重整化群方程

易见, 在单圈重整化后的 S 矩阵元式 (8.2.11) 中, 有一个任意质量标度 (又称为重整化点)μ。特 · 胡夫特曾证明, 在重整化后的量中, 若有一个任意质量标度或重整化点 μ，则如果 μ 变化，虽然所有的裸常数不随 μ 变，所有的重整化后的常数将随 μ 变化，但是 S 矩阵元仍应保持它们的物理观测值。

令 μ 作无穷小尺度变换

$$\mu' = \mu(1+\varepsilon), \tag{8.3.1}$$

或

$$\mu = \mu'(1+\varepsilon)^{-1}, \tag{8.3.2}$$

则式(8.2.5) 可写为

$$\begin{aligned}\lambda &= \mu^{4-n}\left[\lambda_R + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(\lambda_R)(n-4)^{-\nu}\right]\\ &= (\mu')^{4-n}\Big\{(n-4)\epsilon\lambda_R + \lambda_R + \epsilon a_1(\lambda_R)\\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{\infty}[a_\nu(\lambda_R) + \epsilon a_{\nu+1}(\lambda_R)](n-4)^{-\nu}\Big\},\end{aligned} \tag{8.3.3}$$

此展开由于有一个额外项而不同于借助于 μ 的展开，此额外项 $(n-4)\epsilon\lambda_R$ 在 $n\to 4$ 时趋于零，所以可以通过重整化后的量自由地加在裸常数的展开中。然而，如果我们用 μ' 而不是 μ 开始，应该有

$$\lambda = (\mu')^{4-n}\left[\lambda_R + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(\lambda_R)(n-4)^{-\nu}\right], \tag{8.3.4}$$

于是, 我们试图用下面的变换除去这个正比于 $(n-4)$ 的项，

$$\lambda_R = \bar{\lambda}_R - (n-4)\epsilon\bar{\lambda}_R, \tag{8.3.5}$$

把式 (8.3.5) 代入式 (8.3.3)，可得

$$\lambda = (\mu')^{4-n}\left\{\bar{\lambda}_R - (n-4)^2\epsilon^2\bar{\lambda}_R + \epsilon a_1(\bar{\lambda}_R) - (n-4)\epsilon^2\bar{\lambda}_R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{\lambda}_R}a_1(\bar{\lambda}_R)\right.$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[a_\nu(\bar{\lambda}_R) - (n-4)\epsilon\bar{\lambda}_R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{\lambda}_R}a_\nu(\bar{\lambda}_R) + \epsilon a_{\nu+1}(\bar{\lambda}_R)\right.$$
$$\left.\left.-(n-4)\epsilon^2\bar{\lambda}_R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{\lambda}_R}a_{\nu+1}(\bar{\lambda}_R)\right](n-4)^{-\nu}\right\}, \tag{8.3.6}$$

忽略 ϵ^2 项后，我们得到

$$\lambda = (\mu')^{4-n}\left[\bar{\lambda}_R + \epsilon a_1(\bar{\lambda}_R) - \epsilon\bar{\lambda}_R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{\lambda}_R}a_1(\bar{\lambda}_R)\right.$$
$$\left.+\sum_{\nu=1}^{\infty}(n-4)^{-\nu}[a_\nu(\bar{\lambda}_R) + \epsilon a_{\nu+1}(\bar{\lambda}_R) - \epsilon\bar{\lambda}_R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{\lambda}_R}a_{\nu+1}(\bar{\lambda}_R)]\right]$$
$$+O(\epsilon^2)\text{。} \tag{8.3.7}$$

类似地，也有

$$m^2 = m_R^2 - \epsilon m_R^2\bar{\lambda}_R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{\lambda}_R}b_1(\bar{\lambda}_R)$$
$$+m_R^2\sum_{\nu=1}^{\infty}(n-4)^{-\nu}[b_\nu(\bar{\lambda}_R) - \epsilon\bar{\lambda}_R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{\lambda}_R}b_{\nu+1}(\bar{\lambda}_R)] + O(\epsilon^2)\text{。} \tag{8.3.8}$$

与用 μ' 取代 μ 的标准形式比较，应该定义新的 λ'_R 和 m'_R

$$\lambda'_R \equiv \bar{\lambda}_R + \epsilon\left[a_1(\bar{\lambda}_R) - \bar{\lambda}_R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{\lambda}_R}a_1(\bar{\lambda}_R)\right], \tag{8.3.9}$$

$$(m'_R)^2 \equiv m_R^2 - \epsilon m_R^2\bar{\lambda}_R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{\lambda}_R}b_1(\bar{\lambda}_R), \tag{8.3.10}$$

这样，重整化后的 S 矩阵元会有相同的物理值，与使用 μ 还是 μ' 无关。当 $n\to 4$ 时, $\bar{\lambda}_R \to \lambda_R$, 所以，式 (8.3.9) 与式 (8.3.10) 给出 λ_R 与 m_R 的标度变换性质

$$\lambda'_R \equiv \lambda_R + \epsilon[a_1(\lambda_R) - \lambda_R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_R}a_1(\lambda_R)], \tag{8.3.11}$$

$$(m'_R)^2 \equiv m_R^2 - \epsilon m_R^2\lambda_R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_R}b_1(\lambda_R)\text{。} \tag{8.3.12}$$

注意

$$\epsilon = \frac{\mu'-\mu}{\mu} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}, \tag{8.3.13}$$

我们得到

$$\mu\frac{\mathrm{d}\lambda_R}{\mathrm{d}\mu}=a_1(\lambda_R)-\lambda_R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_R}a_1(\lambda_R)\equiv\beta(\lambda_R)\,, \tag{8.3.14}$$

$$\mu\frac{\mathrm{d}m_R^2}{\mathrm{d}\mu}=-m_R^2\lambda_R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_R}b_1(\lambda_R)\equiv-m_R^2\gamma_m(\lambda_R)\,, \tag{8.3.15}$$

式中

$$\gamma_m(\lambda_R)\equiv\lambda_R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_R}b_1(\lambda_R)=-\mu\frac{\mathrm{d}\ln(m^2)}{\mathrm{d}\mu}\text{。} \tag{8.3.16}$$

它们是对于重整化耦合常数 λ_R 和质量 m_R 的卡伦 (Callan)- 塞曼则克重整化群方程[70−72]。

对于 $\lambda\phi^4$ 场，单圈的 β 函数为[73]

$$\beta(\lambda_R)=\frac{3}{16\pi^2}\lambda_R^2+O(\lambda_R^3)\text{。} \tag{8.3.17}$$

将式 (8.3.17) 代入式 (8.3.14)，略去 λ_R 的高阶项，积分得

$$\frac{1}{\lambda_R(Q^2)}-\frac{1}{\lambda_R(\mu^2)}=\frac{3}{8\pi^2}\ln\frac{\mu^2}{Q^2}\,, \tag{8.3.18}$$

此结果说明，随着能量标度平方 Q^2 的增加，耦合常数 $(\lambda>0)$ 也随之增加，它意味着, 对于 $\lambda\phi^4$ 理论，不存在渐近自由。

对于规范场，通常令 $\alpha=g^2/4\pi$，其中 g 为规范耦合常数，一般会有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha(Q^2)}=\frac{1}{\alpha(M^2)}+4\pi b\ln\frac{M^2}{Q^2},\\&b=-\frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T_{\mathrm{f}}\right],\end{aligned} \tag{8.3.19}$$

这里，M 是某个大统一理论 (grand unification theory, GUT) 中的能量标度。Q 是一个任意的能量标度，$C_2(G)$ 是 GUT 群 G 的平方卡西米尔算子，T_{f} 正比于费米子的“味”数。那么，当费米子的味数充分小的时候，我们有

$$b<0,$$

在这种情况下，耦合常数随着能量标度的提高而减小，最终趋于零，所以是渐近自由的。

8.4 相互作用对粒子产生的影响

让我们再考虑 $\lambda\phi^4$ 场。我们将在一级近似下证明：

(1) 粒子产生是博戈留波夫变换和相互作用的综合效应;

(2) 如果没有混合，则在一级近似下没有粒子产生。

现在，我们试图计算 ${}_{\text{in}}\langle 0|\bar{N}_i^{\text{out}}|0\rangle_{\text{in}}$, 其中

$$\bar{N}_i^{\text{out}} = \bar{a}_i^{\text{out}\dagger}\bar{a}_i^{\text{out}}\ 。\tag{8.4.1}$$

因为

$$|0\rangle_{\text{in}} = \sum_I |I\rangle_{\text{out}\ \text{out}}\langle I|0\rangle_{\text{in}},\tag{8.4.2}$$

所以

$${}_{\text{in}}\langle 0|\bar{N}_i^{\text{out}}|0\rangle_{\text{in}} = \sum_{I_j}\sum_{I_k} {}_{\text{in}}\langle 0|I_k\rangle_{\text{out}\ \text{out}}\langle I_k|\bar{N}_i^{\text{out}}|I_j\rangle_{\text{out}\ \text{out}}\langle I_j|0\rangle_{\text{in}}\ ,\tag{8.4.3}$$

为了简单，令

$$\bar{a}_i^{\text{out}} = \alpha_i^* a_i^{\text{out}} - \beta_i^* a_{-i}^{\text{out}\dagger}\ ,\tag{8.4.4}$$

则

$$\begin{aligned}\bar{N}_i^{\text{out}} &= \bar{a}_i^{\text{out}\dagger}\bar{a}_i^{\text{out}}\\ &= |\alpha_i|^2 N_i^{\text{out}} + |\beta_i|^2 a_{-i}^{\text{out}} a_{-i}^{\text{out}\dagger} - \alpha_i\beta_i^* a_i^{\text{out}\dagger} a_{-i}^{\text{out}\dagger} - \beta_i\alpha_i^* a_{-i}^{\text{out}} a_i^{\text{out}}\ ,\end{aligned}\tag{8.4.5}$$

注意

$$N_i^{\text{out}} = a_i^{\text{out}\dagger} a_i^{\text{out}}\ ,\tag{8.4.6}$$

所以，我们有

$$\begin{aligned}&{}_{\text{in}}\langle 0|\bar{N}_i^{\text{out}}|0\rangle_{\text{in}}\\ =&\sum_{I_j}\sum_{I_k}\big[|\alpha_i|^2{}_{\text{in}}\langle 0|I_k\rangle_{\text{out}\ \text{out}}\langle I_j|0\rangle_{\text{in}\ \text{out}}\langle I_k|N_i^{\text{out}}|I_j\rangle_{\text{out}}\\ &+|\beta_i|^2{}_{\text{in}}\langle 0|I_k\rangle_{\text{out}\ \text{out}}\langle I_j|0\rangle_{\text{in}\ \text{out}}\langle I_k|a_{-i}^{\text{out}} a_{-i}^{\text{out}\dagger}|I_j\rangle_{\text{out}}\\ &-\alpha_i\beta_i^*{}_{\text{in}}\langle 0|I_k\rangle_{\text{out}\ \text{out}}\langle I_j|0\rangle_{\text{in}\ \text{out}}\langle I_k|a_i^{\text{out}\dagger} a_{-i}^{\text{out}\dagger}|I_j\rangle_{\text{out}}\\ &-\alpha_i^*\beta_i{}_{\text{in}}\langle 0|I_k\rangle_{\text{out}\ \text{out}}\langle I_j|0\rangle_{\text{in}\ \text{out}}\langle I_k|a_{-i}^{\text{out}} a_i^{\text{out}}|I_j\rangle_{\text{out}}\big]\\ =&|\beta_i|^2 + \sum_{I_k}|\alpha_i|^2 n_i^{\text{out}}|{}_{\text{in}}\langle 0|I_k\rangle_{\text{out}}|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{I_j,I_k}\alpha_i\beta_i^*{}_{\text{in}}\langle 0|I_k\rangle_{\text{out}}{}_{\text{out}}\langle I_j|0\rangle_{\text{in}}{}_{\text{out}}\langle I_k|1_i,1_{-i},I_j\rangle_{\text{out}}\\
&-\sum_{I_j,I_k}\alpha_i^*\beta_i{}_{\text{in}}\langle 0|I_k\rangle_{\text{out}}{}_{\text{out}}\langle I_j|0\rangle_{\text{in}}{}_{\text{out}}\langle I_k,1_{-i},1_i|I_j\rangle_{\text{out}}\\
=&|\beta_i|^2+\sum_{I_k}n_i^{\text{out}}|\alpha_i|^2|_{\text{in}}\langle 0|I_k\rangle_{\text{out}}|^2-\sum_{I_j}\alpha_i\beta_i^*{}_{\text{in}}\langle 0|1_i,1_{-i},I_j\rangle_{\text{out}}{}_{\text{out}}\langle I_j|0\rangle_{\text{in}}\\
&-\sum_{I_k}\alpha_i^*\beta_i{}_{\text{in}}\langle 0|I_k\rangle_{\text{out}}{}_{\text{out}}\langle I_k,1_{-i},1_i|0\rangle_{\text{in}},
\end{aligned}
\tag{8.4.7}
$$

其中，$\sum_{I_k}$ 表示仅对 $N_i^{\text{out}}|I_k\rangle_{\text{out}}\neq 0$ 的那些态求和。注意，从式 (8.2.11)

$$
{}_{\text{in}}\langle 0|I_k\rangle_{\text{out}}\sim\lambda_R \tag{8.4.8}
$$

和

$$
{}_{\text{out}}\langle 0|0\rangle_{\text{in}}={}_{\text{in}}\langle 0|S|0\rangle_{\text{in}}={}_{\text{in}}\langle 0|0\rangle_{\text{in}}+{}_{\text{in}}\langle 0|S^{(1)}|0\rangle_{\text{in}}+O(\lambda_R^2), \tag{8.4.9}
$$

所以，在 λ_R 的第一阶，我们可以略去式 (8.4.7) 右边第二项，只保留第一项，以及第三、第四项中 $I_k=0$ 和 $I_j=0$ 的项，即

$$
-2\text{Re}[-\alpha_i\beta_i^*{}_{\text{in}}\langle 0|1_i,1_{-i}\rangle_{\text{out}}{}_{\text{out}}\langle 0|0\rangle_{\text{in}}]\text{。} \tag{8.4.10}
$$

利用式 (8.2.11) 的结果，我们最后得到以下结果

$$
\begin{aligned}
[{}_{\text{in}}\langle 0|\bar{N}_i^{\text{out}}|0\rangle_{\text{in}}]_{\text{ren}}=|\beta_i|^2-\text{Re}\bigg\{&\alpha_i\beta_i^*\lambda_R\int u_i(y)u_{-i}(y)\,\big[G_{\text{F}}^{\text{finite}}(y,y)\\
&-\frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\left(m_R^2+\left(\xi_R-\frac{1}{6}\right)R(y)\right)\ln\mu\bigg]\,[-g(y)]^{1/2}\mathrm{d}^4y\bigg\}\text{。}
\end{aligned}
\tag{8.4.11}
$$

很清楚，这个表达式证明了本节开始所说的结果, 即粒子产生是博戈留波夫变换和相互作用的综合效应; 如果没有混合，则在一级近似下没有粒子产生。

在结束这一章之前，我们需指出，由于完全连通的格林函数 τ_{c} 由自由格林函数决定 (见式 (8.1.18))，而后者在施瓦西时空中是一个具有虚时周期的周期函数，所以 τ_{c} 也必是一个虚时周期函数。这意味着，即使存在相互作用，霍金辐射的黑体谱依然保持。

第 9 章　几个黑洞物理问题

本章就来讨论有关黑洞的几个问题。

9.1　二维静态情况

除去某些特殊的情况外，计算 4 维的 $\langle|T_{\mu\nu}|\rangle$ 是相当困难的，但在 2 维情况计算 $\langle|T_{\mu\nu}|\rangle$ 则要简单得多。本节就先来讨论 2 维情况。由于球对称坍缩的情况可以约化为一个 2 维模型，故在这一节我们将一并讨论球对称坍缩的情况。

设在 2 维时空或在一个坍缩球体之外，有一个共形不变的真空量子场。

对 2 维闵可夫斯基时空

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \text{ 。}$$

令

$$\begin{aligned} u &= t - x \quad \sim \text{推迟类光坐标}\,, \\ v &= t + x \quad \sim \text{超前类光坐标}\,, \end{aligned}$$

则有

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad \sim \text{双类光坐标 。} \tag{9.1.1}$$

对 2 维弯曲时空

$$\mathrm{d}s^2 = C^2(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \text{ 。} \tag{9.1.2}$$

在静态球对称情况

$$\mathrm{d}s^2 = C^2(r)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,, \tag{9.1.3}$$

其中

$$\begin{cases} u = t - r^* + R_0^*\,, \\ v = t + r^* - R_0^*\,, \end{cases} \tag{9.1.4}$$

$$r^* = \int^r C^{-2}(r)\mathrm{d}r\,, \qquad R_0^* = \int^{R_0} C^{-2}(r)\mathrm{d}r\,, \tag{9.1.5}$$

R_0 是球对称星体的边界。特别地，对于 2 维施瓦西时空, R_0 不再出现，

$$C^2(r) = 1 - \frac{2M}{r}\,,$$
$$r^* = r + 2M\ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \quad \sim \text{乌龟坐标}\,。 \tag{9.1.6}$$

一般地，注意到

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}C^2 \\ \frac{1}{2}C^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g = -\frac{1}{4}C^4\,, \tag{9.1.7}$$

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 2C^{-2} \\ 2C^{-2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.1.8}$$

$$\begin{aligned}\Box &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu) = \frac{2}{C^2}(\partial_u\partial_v + \partial_v\partial_u) = \frac{4}{C^2}\partial_u\partial_v \\ &= \frac{4}{C^2}\left(-\frac{C^2}{2}\partial_r + \frac{1}{2}\partial_t\right)\left(\frac{C^2}{2}\partial_r + \frac{1}{2}\partial_t\right),\end{aligned} \tag{9.1.9}$$

这是因为

$$\begin{cases} \partial_u = \dfrac{\partial r}{\partial u}\partial_r + \dfrac{\partial t}{\partial u}\partial_t = -\dfrac{C^2}{2}\partial_r + \dfrac{1}{2}\partial_t \\ \partial_v = \dfrac{\partial r}{\partial v}\partial_r + \dfrac{\partial t}{\partial v}\partial_t = \dfrac{C^2}{2}\partial_r + \dfrac{1}{2}\partial_t \end{cases} 。 \tag{9.1.10}$$

由于所有的 2 维时空都是共形平直，由式 (7.2.15) 知

$$R = \Box(\ln C^2) = \frac{4}{C^2}\partial_u\partial_v(\ln C^2)\,, \tag{9.1.11}$$

能动张量的真空期待值可以很容易地用熟知的共形平庸公式从 $\langle 0|T_{ab}|0\rangle_M$ 计算出来[74],

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle = \theta_{\mu\nu} - \frac{1}{48\pi}Rg_{\mu\nu} \tag{9.1.12}$$

其中

$$\theta_{uu} = -\frac{1}{12\pi}C\partial_u^2 C^{-1}, \quad \theta_{vv} = -\frac{1}{12\pi}C\partial_v^2 C^{-1}, \quad \theta_{uv} = \theta_{vu} = 0\,。 \tag{9.1.13}$$

如果进而考虑 2 维共形真空是 $|0\rangle$，则对静态球对称情况,

$$|0\rangle_{\text{in}} = |0\rangle_{\text{out}} \equiv |0\rangle, \tag{9.1.14}$$

从式 (9.1.7) 和式 (9.1.11)，有

$$\begin{aligned}
\langle 0|T_{uv}|0\rangle &= -\frac{1}{48\pi}R\frac{1}{2}C^2 = -\frac{1}{96\pi}C^2\Box\ln C^2 = \frac{1}{48\pi}C^2(CC''+C'^2),\\
\langle 0|T_{uu}|0\rangle &= \langle 0|T_{vv}|0\rangle = -\frac{1}{12\pi}C\partial_u^2C^{-1} = \frac{1}{48\pi}C^3C'',\\
\langle 0|T_{vv}|0\rangle &= -\frac{1}{12\pi}C\partial_v^2C^{-1} = \frac{1}{48\pi}C^3C'' = \langle 0|T_{uu}|0\rangle,
\end{aligned} \tag{9.1.15}$$

其中, $C' = \dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}r}$。对 2 维瑞斯纳 - 诺斯特朗 (Reissner-Nordström, R-N) 时空

$$C^2(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2},$$

结果是

$$\begin{aligned}
&\langle 0|T_{uu}|0\rangle = \langle 0|T_{vv}|0\rangle = \frac{1}{24\pi}\left(-\frac{M}{r^3} + \frac{3M^2}{2r^4} + \frac{3Q^2}{2r^4} - \frac{3MQ^2}{r^5} + \frac{Q^4}{r^6}\right), \qquad (9.1.16)\\
&\langle 0|T_{uu}|0\rangle = \langle 0|T_{vv}|0\rangle < 0 \quad (\text{当} r\to r^+),\\
&\langle 0|T_{uu}|0\rangle = \langle 0|T_{vv}|0\rangle \to 0 \quad (\text{当} r\to \infty)。
\end{aligned}$$

这些结果与布维尔真空的结果一致，它们说明围绕静态 R-N 黑洞的视界存在负能的“奇异物质”。

对于坍缩球体所形成黑洞的情况，处理则有所不同。在星体外部，式 (9.1.3) 和式 (9.1.4) 仍适用, 但这时星体表面的坐标是随时间变化的。设 R_0 是坍缩开始时刻星体表面的径向坐标。在星体内部，线元为

$$\mathrm{d}s^2 = \varOmega^2\mathrm{d}U\mathrm{d}V \tag{9.1.17}$$

其中，U 和 V 是星体内部的类光坐标，它们定义星体内部的时间为 τ，则

$$\begin{cases} U = \tau - r + R_0,\\ V = \tau + r - R_0, \end{cases} \tag{9.1.18}$$

并满足在 $t=\tau=0$ 时刻，$u=U=v=V=0$。对于球对称情况, 我们只考虑 $r\geqslant 0$ 的区域，$r=0$

$$\text{即 } V = U - 2R_0 \tag{9.1.19}$$

的点就作为一个“反射点”，它相当于要求在 $r=0$ 点满足边界条件 $\phi=0$, 而式 (9.1.19) 建立起入射波与出射波之间的联系。设星体内外的类光坐标存在如下变换关系

$$U = \alpha(u), \qquad v = \beta(V), \tag{9.1.20}$$

则由式 (9.1.19) 知

$$v = \beta(V) = \beta(U - 2R_0) = \beta(\alpha(u) - 2R_0)。 \tag{9.1.21}$$

于是，坍缩球体问题就转化为在 2 维时空中运动的一个反射镜的问题 (见 4.2.4 节)。仿 4.2.4 节 (也见文献 [1]8.2 节)，$\Box\phi = 0$ 或 $\partial_u\partial_v\phi = 0$ 有模解

$$\mathrm{i}(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\beta(\alpha(u)-2R_0)}\right\}。 \tag{9.1.22}$$

由于星体的内解与外解应在坍缩星体表面 $r = R(\tau)$ 处连接，即在坍缩表面应有

$$C^2 = \Omega^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u}\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V}} = \Omega^2\frac{\alpha'(u)}{\beta'(V)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha'(u)}{\beta'(V)} = \frac{C^2}{\Omega^2}, \tag{9.1.23}$$

$$\alpha' = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau}}{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}} = \frac{1 - \dot{R}}{\dot{t} - C^{-2}\dot{R}}, \tag{9.1.24}$$

$$\beta' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}}{\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\tau}} = \frac{\dot{t} + C^{-2}\dot{R}}{1 + \dot{R}}, \tag{9.1.25}$$

其中，点代表对 τ 求导，由式 (9.1.23)∼ 式 (9.1.25) 解出 $\dot{t}$，代回式 (9.1.24) 和式 (9.1.25)，得

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{(1 - \dot{R})C^2}{[\Omega^2 C^2(1 - \dot{R}^2) + \dot{R}^2]^{\frac{1}{2}} - \dot{R}}, \\ \beta' &= \frac{[\Omega^2 C^2(1 - \dot{R}^2) + \dot{R}^2]^{\frac{1}{2}} + \dot{R}}{(1 + \dot{R})C^2}。 \end{aligned} \tag{9.1.26}$$

比较闵可夫斯基时空中遥远过去的标准平面波解，定义新的类光坐标

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \beta(\alpha(u) - 2R_0), \\ \hat{v} &= v, \end{aligned} \tag{9.1.27}$$

在该类光坐标下，

$$\mathrm{d}s^2 = \hat{C}^2(\hat{u}, \hat{v})\mathrm{d}\hat{u}\mathrm{d}\hat{v}, \tag{9.1.28}$$

其中

$$\hat{C}^2(\hat{u}, \hat{v}) = C^2(r)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\hat{u}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\hat{v}} = \frac{C^2(r)}{\dfrac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}u}} = \frac{C^2(r)}{\beta'\alpha'}。 \tag{9.1.29}$$

现在，让我们用下面的模函数来定义入射真空 $|\hat{0}\rangle$，即

$$U^{\text{in}} \equiv \mathrm{i}(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\hat{v}} = \mathrm{i}(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v} 。 \tag{9.1.30}$$

在星体中心“反弹”后，该入射波变为出射波，坍缩球体的出射模函数为

$$U^{\text{out}} \equiv \mathrm{i}(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\hat{u}} = \mathrm{i}(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\beta(\alpha(u)-2R_0)} 。 \tag{9.1.31}$$

$T_{\hat{u}\hat{u}}$、$T_{\hat{v}\hat{v}}$、$T_{\hat{u}\hat{v}}$ 在真空 $|\hat{0}\rangle$ 中的期待值由式 (9.1.11)∼ 式 (9.1.13) 给出，只需将其中的不带 ˆ 的量换成带 ˆ 的量即可。利用坐标变换式 (9.1.27), 于是有

$$\begin{aligned}
\langle\hat{0}|T_{uu}|\hat{0}\rangle &= \left(\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}u}\right)^2 \langle\hat{0}|T_{\hat{u}\hat{u}}|\hat{0}\rangle = -\frac{1}{12\pi}\left(\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}u}\right)^2 \hat{C}\partial_{\hat{u}}^2\hat{C}^{-1} \\
&= -\frac{1}{12\pi}C(\beta'\alpha')^{1/2}\partial_u\left\{\frac{1}{\beta'\alpha'}\partial_u[C^{-1}(\beta'\alpha')^{1/2}]\right\} \\
&= -\frac{1}{12\pi}C(\beta'\alpha')^{1/2}\partial_u\left\{\frac{1}{(\beta'\alpha')^{1/2}}\partial_u C^{-1} + \frac{1}{(\beta'\alpha')^{1/2}C}[\partial_u\ln(\beta'\alpha')^{1/2}]\right\} \\
&= -\frac{1}{12\pi}\{C\partial_u^2C^{-1} - [\partial_u\ln(\beta'\alpha')^{1/2}]^2 + [\partial_u^2\ln(\beta'\alpha')^{1/2}]\} \\
&= \frac{1}{48\pi}C^3C'' + \frac{1}{48\pi}\left\{\left(\frac{(\alpha'\beta'')^2}{\beta'^2} + \frac{(\alpha'')^2}{\alpha'^2} + 2\frac{\alpha''\beta''}{\beta'}\right)\right. \\
&\quad \left. -2\partial_u\left(\frac{\alpha'\beta''}{\beta'} + \frac{\alpha''}{\alpha'}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{48\pi}C^3C'' + \frac{1}{48\pi}\left\{\left[\frac{(\alpha'\beta'')^2}{\beta'^2} + \frac{(\alpha'')^2}{\alpha'^2}\right] - 2(\alpha')^2\left(\frac{\beta''}{\beta'}\right)' + \left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)'\right\} \\
&= \frac{1}{48\pi}C^3C'' + \frac{1}{12\pi}(\alpha')^{1/2}[(\alpha')^{-1/2}]'' + \frac{(\alpha')^2}{12\pi}(\beta')^{1/2}[(\beta')^{-1/2}]'',
\end{aligned} \tag{9.1.32}$$

$$\begin{aligned}
\langle\hat{0}|T_{vv}|\hat{0}\rangle &= \left(\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}v}\right)^2 \langle\hat{0}|T_{\hat{v}\hat{v}}|\hat{0}\rangle = -\frac{1}{12\pi}\hat{C}\partial_{\hat{v}}^2\hat{C}^{-1} \\
&= -\frac{1}{12\pi}C(\beta'\alpha')^{-1/2}\partial_v^2[C^{-1}(\beta'\alpha')^{1/2}] \\
&= -\frac{1}{12\pi}C\partial_v^2(C^{-1}) = \frac{1}{48\pi}C^3C'',
\end{aligned} \tag{9.1.33}$$

$$\begin{aligned}
\langle\hat{0}|T_{uv}|\hat{0}\rangle &= \frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}v}\langle\hat{0}|T_{\hat{u}\hat{v}}|\hat{0}\rangle = -\frac{\beta'\alpha'}{24\pi}\partial_{\hat{u}}\partial_{\hat{v}}\ln\hat{C}^2 \\
&= -\frac{\beta'\alpha'}{24\pi}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\hat{u}}\partial_u\partial_v(\ln C^2 - \ln(\beta'\alpha')) = -\frac{1}{24\pi}\partial_u\partial_v\ln C^2 \\
&= -\frac{1}{96\pi}C^2\Box\ln C^2 = \frac{1}{48\pi}C^2(CC'' + C'^2) 。
\end{aligned} \tag{9.1.34}$$

球对称坍缩星体的外解可约化为 2 维施瓦西度规

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\qquad u=t-r^*+R_0^*,\qquad v=t+r^*-R_0^*\,。\tag{9.1.35}$$

在 H^+ 处，$C^2=0$。式 (9.1.32) 的第一项在 H^+ 处为 $-\frac{\kappa_{\rm G}^2}{48\pi}$, 由式 (9.1.26) 知，在 H^+ 附近

$$\alpha'\sim\frac{(\dot{R}-1)C^2}{2\dot{R}}\to 0,\tag{9.1.36}$$

其中, 已用到 $(\dot{R}^2)^{1/2}=-\dot{R}$, 这是因为对于坍缩星 $\dot{R}<0$。式 (9.1.36) 已将 α' 转换为 τ 的函数。为具体写出 α' 的表达式, 我们考虑 C^2 和 R 在 H^+ 附近对 τ 的泰勒 (Taylor) 展开，即

$$\begin{aligned}&R(\tau)=R_{\rm H}-\dot{R}(\tau_{\rm H})(\tau_{\rm H}-\tau)+O[(\tau_{\rm H}-\tau)^2],\\&C^2=-2\kappa_{\rm G}\dot{R}(\tau_{\rm H})(\tau_{\rm H}-\tau)+O[(\tau_{\rm H}-\tau)^2],\end{aligned}\tag{9.1.37}$$

其中

$$\kappa_{\rm G}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}C^2}{\mathrm{d}r}\bigg|_{H^+}=\frac{1}{4M}\,,\tag{9.1.38}$$

所以

$$\alpha'\sim(1-\dot{R})\kappa_{\rm G}(\tau_{\rm H}-\tau)\,,\tag{9.1.39}$$

另外，

$$\alpha'=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u}=\frac{1-\dot{R}}{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}u}\sim\kappa_{\rm G}(\tau_{\rm H}-\tau)\,。\tag{9.1.40}$$

于是，式 (9.1.32) 的第二项在 H^+ 处的贡献为

$$\frac{1}{12\pi}(\alpha')^{1/2}[(\alpha')^{-1/2}]''=\frac{1}{12\pi}(\tau_{\rm H}-\tau)^{1/2}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\tau_{\rm H}-\tau)^{-1/2}\right]=\frac{\kappa_{\rm G}^2}{48\pi}\,。\tag{9.1.41}$$

可以证明，第三项的贡献为 0。所以，H^+ 附近重整化的能动张量为

$$\begin{aligned}&\langle\hat{0}|T_{uu}|\hat{0}\rangle=-\frac{\kappa_{\rm G}^2}{48\pi}+\frac{\kappa_{\rm G}^2}{48\pi}=0\,,\\&\langle\hat{0}|T_{uv}|\hat{0}\rangle=0,\\&\langle\hat{0}|T_{vv}|\hat{0}\rangle=-\frac{\kappa_{\rm G}^2}{48\pi}\,。\end{aligned}\tag{9.1.42}$$

在 $\mathscr{J}^+$ 处，$C^2=1$、$C'=0$、$C''=0$，所以式 (9.1.32) 的第一项贡献为零。积分式 (9.1.40) 得

$$\kappa_{\mathrm{G}} u \sim -\ln|\tau_{\mathrm{H}}-\tau| + 常数 = -\ln|U+R_{\mathrm{H}}-R_0-\tau_{\mathrm{H}}| + 常数, \tag{9.1.43}$$

由此可见，当 $U\to\tau_{\mathrm{H}}+R_0-R_{\mathrm{H}}$ 时，$u\to\infty$。于是，在 $\mathscr{J}^+$ 上、晚期 (在接近 H^+ 的地方)，有

$$U \propto \mathrm{e}^{-\kappa_{\mathrm{G}} u}\,。 \tag{9.1.44}$$

第二、三项的贡献不变，所以

$$\begin{aligned} &\langle\hat{0}|T_{uu}|\hat{0}\rangle = \frac{\kappa_{\mathrm{G}}^2}{48\pi} > 0\,,\\ &\langle\hat{0}|T_{vv}|\hat{0}\rangle = 0\,,\\ &\langle\hat{0}|T_{uv}|\hat{0}\rangle = 0\,。\end{aligned} \tag{9.1.45}$$

它显然不同于式 (9.1.16) 的结果，在 $\mathscr{J}^+$，$\langle 0|T_{uu}|0\rangle = \langle 0|T_{vv}|0\rangle = 0$。

注意

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_{\mathrm{G}}^2}{48\pi} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\omega}{\exp\left(\dfrac{2\pi\omega}{\kappa_{\mathrm{G}}}\right)-1}\mathrm{d}\omega = 2\pi\int_0^\infty \frac{\nu}{\exp\left(\dfrac{4\pi^2\nu}{\kappa_{\mathrm{G}}}\right)-1}\mathrm{d}\nu \\ &= 2\pi\int_0^\infty \frac{\nu}{\exp\left(\dfrac{2\pi\nu}{k_{\mathrm{B}}T}\right)-1}\mathrm{d}\nu \end{aligned} \tag{9.1.46}$$

恰为 2 维热辐射的辐射流，称为霍金流，其中

$$k_{\mathrm{B}}T \equiv \frac{\kappa_{\mathrm{G}}}{2\pi} = (12|t_{\mathrm{E}}|\pi^{-1})^{\frac{1}{2}}\,。 \tag{9.1.47}$$

其中

$$\begin{cases} |t_{\mathrm{E}}| = \kappa_{\mathrm{G}}^2/(48\pi) \\ 或\quad |t_{\mathrm{E}}| = \langle\hat{0}|T_{uu}|\hat{0}\rangle|_{\mathscr{J}^+} = -\langle\hat{0}|T_{vv}|\hat{0}\rangle|_{H^+}\,。\end{cases} \tag{9.1.48}$$

这样，基于入射真空 $|\hat{0}\rangle$，我们发现在 $\mathscr{J}^+$ 处，有出射正能辐射流，而在 H^+ 处有入射负能辐射流。根据能量守恒原理，可以得出结论：出射霍金辐射流不是由黑洞事件视界 H^+ 发射的量子造成的，而是由从 H^+ 外部吸收负能流形成的，这一过程造成了黑洞质量的丢失。

因为球对称真空的时空拓扑是 $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{S}^2$，这里 $\mathbb{S}^2$ 与欧氏几何中的 $\mathbb{S}^2$ 相同，只有径向度量和时间度量被引力场改变，所以我们相信上面关于黑洞的 2 维结果，在完整的 4 维处理中依然正确 (图 9.1).

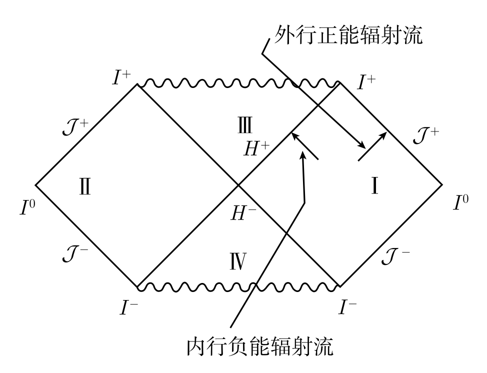


图 9.1　霍金辐射的彭若斯图

9.2　固定于永久施瓦西黑洞外的探测器

在 4.6 节中，我们已区分了三类不同的真空，即布维尔真空 $|0\rangle_{\mathrm{B}} = |0\rangle_{\mathrm{S}}$、哈特–霍金真空 $|0\rangle_{\mathrm{H}}$ 和安鲁真空 $|0\rangle_{\mathrm{U}}$。对于不同的真空，粒子器探测器的反应是不同的，下边我们分别讨论。

1) 布维尔真空 $|0\rangle_{\mathrm{B}}$

对于位置固定 ($r =$ 常数) 的探测器，标量场布维尔真空的怀特曼函数在 $r \to 2M$ 和 $r \to \infty$ 时趋于[75]

$$D_s^+ \to \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi^2\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\omega \mathrm{d}\omega}{\exp\left(\dfrac{2\pi\omega}{\kappa_{\mathrm{G}}}\right)-1} & (r \to 2M)\,, \\ 0 & (r \to \infty)。\end{cases} \tag{9.2.1}$$

重整化能动张量的渐近行为是

$${}_{\mathrm{B}}\langle 0|T_\mu^\nu|0\rangle_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{2\pi^2\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)^2}\int_0^\infty \frac{\omega^3 \mathrm{d}\omega}{\exp(8\pi M\omega)-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{3}\end{bmatrix} (\text{当}\, r \to 2M\,\text{时}), \tag{9.2.2}$$

${}_{\mathrm{B}}\langle 0|T_\mu^\nu|0\rangle_{\mathrm{B}} = 0$ (当 $r \to \infty$ 时)。

所以，无穷远的静止探测器探测不到粒子。

2) 哈特–霍金真空 $|0\rangle_{\mathrm{H}}$

对于位置固定的探测器，哈特–霍金真空的怀特曼函数和重整化能动张量的渐近表达式分别是

$$D_{\mathrm{H}}^{+} \to \frac{1}{192\pi^2 M^2}, \quad r \to 2M, \tag{9.2.3}$$

$$D_{\mathrm{H}}^{+} \to \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{\omega \mathrm{d}\omega}{\exp\left(\frac{2\pi\omega}{\kappa_{\mathrm{G}}}\right) - 1}, \quad r \to \infty, \tag{9.2.4}$$

$${}_{\mathrm{H}}\langle 0|T_{\bar{u}\bar{u}}|0\rangle_{\mathrm{H}} \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{\omega^3 \mathrm{d}\omega}{\exp\left(\frac{2\pi\omega}{\kappa_{\mathrm{G}}}\right) - 1}, \tag{9.2.5}$$

其中 $\bar{u} = \mathcal{T} - \mathcal{R}$ 是克鲁斯卡尔坐标定义的类光坐标 (见 4.6 节)。所以，粒子探测器会测到平衡热辐射。

3) 安鲁真空 $|0\rangle_{\mathrm{U}}$

对于位置固定的探测器，安鲁真空的怀特曼函数渐近于

$$D_{\mathrm{U}}^{+} \xrightarrow{r\to 2M} \frac{1}{192\pi^2 M^2} - \frac{1}{32\pi^2 M^2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega \Sigma(2l+1)|B_l(\omega)|^2}{\omega\left[\exp\left(\frac{2\pi\omega}{\kappa_{\mathrm{G}}}\right) - 1\right]}, \tag{9.2.6}$$

$$D_{U}^{+} \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{8\pi^2 r^2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega \Sigma(2l+1)|B_l(\omega)|^2}{\omega\left[\exp\left(\frac{2\pi\omega}{\kappa_{\mathrm{G}}}\right) - 1\right]}。 \tag{9.2.7}$$

重整化能动张量渐近于

$${}_{\mathrm{U}}\langle 0|T_{\mu}^{\nu}|0\rangle_{\mathrm{U}} \xrightarrow{r\to 2M} \frac{L}{4\pi}\begin{bmatrix} \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} & -r^{-2} \\ r^{-2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2} & \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \end{bmatrix}, \tag{9.2.8}$$

$${}_{\mathrm{U}}\langle 0|T_{\mu}^{\nu}|0\rangle_{\mathrm{U}} \xrightarrow{r\to\infty} -\frac{L}{4\pi r^2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.2.9}$$

其中, μ、ν 取 t、r 等, 并且

$$L \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \omega \frac{\mathrm{d}\omega \Sigma(2l+1)|B_l(\omega)|^2}{\exp\left(\frac{2\pi\omega}{\kappa_{\mathrm{G}}}\right) - 1} \tag{9.2.10}$$

是黑洞的发光度，于是探测器能探测到来自黑洞的热粒子流。

9.3 非静态情况

由于霍金蒸发 (亦即霍金辐射)，事件视界 H^+ 的面积或黑洞的质量不是常数 (图 9.2)，所以真实的背景时空不是静态的。

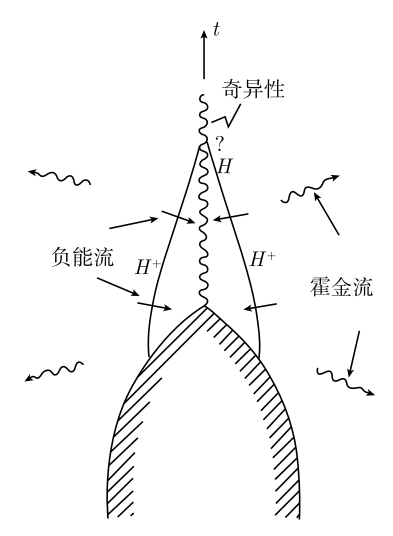


图 9.2 霍金蒸发示意图

9.3.1 凡迪亚度规

早在 1951 年，凡迪亚 (Vaidya) 发现了一个蒸发球体的度规[76]，即

$$\mathrm{d}s^2 = \left[1 - \frac{2M(v)}{r}\right] \mathrm{d}v^2 - 2\mathrm{d}v\mathrm{d}r - r^2\mathrm{d}\Omega^2 。 \tag{9.3.1}$$

可以证明，式 (9.3.1) 是爱因斯坦方程

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

的解，其中

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\kappa}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}M(v)}{\mathrm{d}v}\delta^0_\mu\delta^0_\nu 。 \tag{9.3.2}$$

在 1984 年和 1985 年，巴比诺特 (Balbinot) 考虑了霍金辐射对凡迪亚几何的反作用。在 4 维非静态球对称情况下，因为不知道 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$，所以现在还不可能求解 4 维半经典爱因斯坦方程

$$G_{\mu\nu} = -\kappa\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle \tag{9.3.3}$$

虽然没有 2 维的爱因斯坦方程，但在 2 维共形平庸情况下, 我们仍能容易地确定 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$。

2 维凡迪亚度规可以写成

$$\mathrm{d}s^2=\left[1-\frac{2M(v)}{r}\right]\mathrm{d}v^2-2\mathrm{d}v\mathrm{d}r\,,\tag{9.3.4}$$

用下式引进类光坐标 u, 即

$$\mathrm{d}u=g\left\{\mathrm{d}v+2\left[1-\frac{2M(v)}{r}\right]^{-1}\mathrm{d}r\right\},\tag{9.3.5}$$

其中, g 是一个积分因子, 由可积性条件定出。这样我们可以把式 (9.3.4) 写成

$$\mathrm{d}s^2=\left[1-\frac{2M(v)}{r}\right]g^{-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\tag{9.3.6}$$

可以证明

$$\langle 0|T_{vv}|0\rangle=\frac{1}{24\pi}\left(\frac{\dot{M}}{r^2}-\frac{M}{r^3}+\frac{3}{2}\frac{M^2}{r^4}\right),\tag{9.3.7}$$

其中, $|0\rangle=|0\rangle_{\mathrm{in}}$ 是安鲁真空，它用类时矢量场 $\dfrac{\partial}{\partial v}$ 或 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 来定义。特别地，在事件视界上有

$$\langle 0|T_{vv}|0\rangle=\frac{1}{24\pi}\left(\frac{\dot{M}}{r_{\mathrm{E}}^2}-\frac{M}{r_{\mathrm{E}}^3}+\frac{3}{2}\frac{M^2}{r_{\mathrm{E}}^4}\right)\equiv t_{\mathrm{E}}\,,\tag{9.3.8}$$

其中, r_{E} 是事件视界的位置，它可以用如下方法来确定。首先，由度规知，未来指向的径向外行类光测地线的切矢 l^μ 为 $\left\{1,\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{2M(v)}{r}\right]\right\}$，满足 $g_{\mu\nu}l^\mu l^\nu=0$; 其次，定义 l^μ 方向的方向导数算子

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}=l^\mu\nabla_\mu=\frac{\partial}{\partial v}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{2M(v)}{r}\right]\frac{\partial}{\partial r};\tag{9.3.9}$$

再次，在外行类光测地线上，$r(v)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}v}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{2M(v)}{r}\right],\tag{9.3.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}v^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\frac{1}{2}\left[1-\frac{2M(v)}{r}\right]=-\frac{\dot{M}}{r}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}v}\frac{M(v)}{r^2}\,;\tag{9.3.11}$$

最后，事件视界的位置 r_{E} 由

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}v}\right|_{r_{\mathrm{E}}}\approx 0,\tag{9.3.12}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}v^2}\right|_{r_{\mathrm{E}}}\approx 0\tag{9.3.13}$$

来定出, 即

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}v}\right|_{r_{\mathrm{E}}} = \frac{1}{2}\left.\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right|_{r_{\mathrm{E}}} \approx 0, \tag{9.3.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}v^2} = \left(\frac{M}{r_{\mathrm{E}}^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}v} + \frac{L}{r_{\mathrm{E}}}\right)_{r_{\mathrm{E}}} \approx 0, \tag{9.3.15}$$

其中

$$L \equiv -\dot{M}$$

是发光率。在 $\dot{M}$ 的一阶近似下，结果是

$$r_{\mathrm{E}} \approx 2M(1+4\dot{M})\text{。} \tag{9.3.16}$$

容易看出，在 $\dot{M}$ 的一级近似下，$t_{\mathrm{E}} < 0$。根据黑洞的能量或质量守恒原理，入射负能流应该伴随一个相等的出射正能流。从式 (9.1.47) 可得

$$k_{\mathrm{B}}T = (12|t_{\mathrm{E}}|\pi^{-1})^{\frac{1}{2}} = (8\pi M)^{-1}(1-8\dot{M})^{\frac{1}{2}}, \tag{9.3.17}$$

这可看成蒸发中的 2 维施瓦西黑洞的温度演化规律。

在 4 维蒸发黑洞的事件视界附近，$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ 可以用 2 维 $\langle 0|T_{vv}|0\rangle$ 等来近似。把它作为半经典爱因斯坦方程的源，我们就可以求

$$G_{\mu\nu} = -\kappa\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$$

的反作用解了。当 M^2 很大或 $-\dot{M} \ll 1$ 时，质量因辐射而损失的速度为

$$\dot{M} = -\alpha(M^2-16\alpha)^{-1} \quad (\hbar = c = G = 1), \tag{9.3.18}$$

其中, α 是依赖辐射量子的质量和角动量的无量纲参数。在低温下,

$$\alpha \sim 10^{-5}\,,$$

而在极高温度下,

$$\alpha \sim 10^{-2}\text{。}$$

当 $M^2 \gg 16\alpha$ 时，可以重新得到霍金的 M^{-2} 定律 (图 9.3)，即

$$\dot{M} \sim -\alpha M^{-2}\text{。} \tag{9.3.19}$$

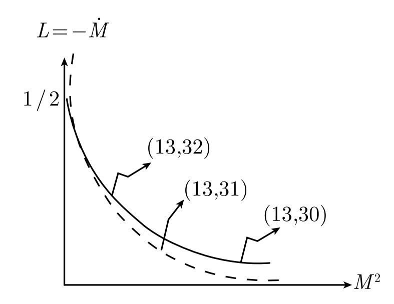


图 9.3　凡迪亚黑洞的辐射曲线

巴比诺特还一般性地得到

$$L \approx \frac{\alpha}{M^2}[1+(1+16L)^{\frac{1}{2}}]^2[1+(1+16L)^{\frac{1}{2}}-8L]^2\text{ 。} \tag{9.3.20}$$

式 (9.3.20) 表明，黑洞不会完全蒸发，发光率有一个上限 $L=1/2$。

9.3.2　卡梅里 – 凯依度规

1977 年，卡梅里和凯依 (Carmeli-Kaye) 发现了一个合理的轴对称辐射度规[77]，即

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &\left[1-\frac{2M(v)r}{\rho^2}\right]\mathrm{d}v^2-2\mathrm{d}v\mathrm{d}r-\frac{4M(v)ra}{\rho^2}\sin^2\theta\mathrm{d}v\mathrm{d}\varphi+\rho^2\mathrm{d}\theta^2\\ &-2a\sin^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi-\sin^2\theta\left[r^2+a^2+\frac{2M(v)ra^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right]\mathrm{d}\varphi^2,\end{aligned} \tag{9.3.21}$$

其中

$$\rho^2 \quad = r^2+a^2\cos^2\theta a = \text{常数 。}$$

当 M 是常数时，该度规化为克尔 (Kerr) 度规，因而它可解释成辐射克尔黑洞。由于尚无法知道 4 维辐射克尔黑洞辐射流的能动张量的真空期待值 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$，我们考虑对称轴上 $(\theta=0,\pi)$ 的辐射，从而将问题变为 2 维问题[78]。这时，

$$\mathrm{d}s^2=\left[1-\frac{2M(v)r}{r^2+a^2}\right]\mathrm{d}v^2-2\mathrm{d}v\mathrm{d}r, \tag{9.3.22}$$

在事件视界 r_{E}^{+} 附近，重整化能动张量为

$$t_{\mathrm{E}} \equiv \langle 0|T_{vv}|0\rangle = -\frac{1}{768\pi M^2}\left[1-\frac{a^2}{(r_{\mathrm{E}}^{+})^2}\right]\left[1-\frac{a^2}{(r_{\mathrm{E}}^{+})^2}-8\dot{M}\right]<0\,, \tag{9.3.23}$$

其中, r_{E}^{+} 可用与 9.3.1 节相同的办法定出，即 r_{E} 应满足

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}v}\right|_{r_{\mathrm{E}}^{+}}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{2M(v)r_{\mathrm{E}}^{+}}{(r_{\mathrm{E}}^{+})^2+a^2}\right]\approx 0, \tag{9.3.24}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}v^2}\right|_{r_{\mathrm{E}}^{+}}=-\dot{M}r_{\mathrm{E}}^{+}+\frac{M}{2}\left[1-\frac{2Mr_{\mathrm{E}}^{+}}{(r_{\mathrm{E}}^{+})^2+a^2}\right]\frac{(r_{\mathrm{E}}^{+})^2-a^2}{(r_{\mathrm{E}}^{+})^2+a^2}\approx 0\text{。} \tag{9.3.25}$$

设事件视界相对稳态黑洞的事件视界的偏离是

$$\Delta r_{+}=r_{\mathrm{E}}^{+}-r_{+}=r_{\mathrm{E}}^{+}-M-\sqrt{M^2-a^2}, \tag{9.3.26}$$

它由 $\dot{M}\neq 0$ 所致，应是一个远小于 $r_{+}-r_{-}$ 的小量。在零阶近似下, $2M=r_{+}+r_{-}$, $a^2=r_{+}r_{-}(r_{-}=M-\sqrt{M^2-a^2})$ 式 (9.3.25) 化为

$$\dot{M}r_{+}\approx\frac{M}{2}\frac{(r_{+}-r_{-})\Delta r_{+}}{[(r_{+})^2+r_{+}r_{-}]^2}[(r_{+})^2-r_{+}r_{-}],$$

求解, 得

$$\Delta r_{+}\approx\frac{4\dot{M}(r_{+}+r_{-})r_{+}^2}{(r_{+}-r_{-})^2}, \tag{9.3.27}$$

所以

$$r_{\mathrm{E}}^{+}=r_{+}\left[1+\frac{4r_{+}^2\dot{M}}{(r_{+}-r_{-})^2}+\frac{4\dot{M}a^2}{(r_{+}-r_{-})^2}\right]\text{。} \tag{9.3.28}$$

从式 (9.1.47)

$$k_{\mathrm{B}}T=(12|t_{\mathrm{E}}|\pi^{-1})^{1/2}$$

可得

$$k_{\mathrm{B}}T=\frac{1}{8\pi M}\left[1-\frac{a^2}{(r_{\mathrm{E}}^{+})^2}\right]^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{a^2}{(r_{\mathrm{E}}^{+})^2}-8\dot{M}\right]^{\frac{1}{2}}\text{。} \tag{9.3.29}$$

如果 $a=0$，式 (9.3.29) 回到式 (9.3.17)。如果 $\dot{M}=0$，式 (9.3.29) 回到稳态克尔黑洞的霍金温度

$$T=\frac{1}{2\pi k_{\mathrm{B}}}\frac{r_{+}-r_{-}}{2(r_{+}^2+a^2)}\text{。} \tag{9.3.30}$$

依假定，黑洞的蒸发只改变 M 而不改变 $a(\dot{M}\neq 0$, 而 $\dot{a}=0)$，从而随着黑洞的蒸发，$\sqrt{M^2-a^2}/r_{+}=\epsilon/r_{+}\to 0$。由式 (9.3.23) 知，当 $r_{\mathrm{E}}^{+}=a=M$ 时 $t_{\mathrm{E}}=0, T=0$, 此时 $\dot{M}$ 也应等于零。从另一方面看，式 (9.3.27) 成立也要求 $\dot{M}$ 比 ϵ^2/r_{+}^2 更快地趋于零。也就是说，当辐射克尔黑洞趋于极端黑洞时，霍金温度和热辐射将趋于零。

9.4 4 维静态情况

9.4.1 4 维静态情况

现在我们讨论在静态爱因斯坦时空中热态的能动张量[79]。首先，定义静态爱因斯坦时空为具有宇宙学常数的真空爱因斯坦方程

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \tag{9.4.1}$$

的静态解。令①

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}\,, \tag{9.4.2}$$

并且

$$g_{tt} = 1 \quad (\text{极端静态度规}), \tag{9.4.3}$$

那么

$$\bar{G}(x,x') = \Omega^{-1}(x) G(x,x') \Omega^{-1}(x^1)。 \tag{9.4.4}$$

把洛伦兹号差改为欧几里得号差，$\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\mathrm{d}\tau$，$\mathrm{d}s = -\mathrm{i}\mathrm{d}s_{\mathrm{E}}$，则温度格林函数具有虚时 τ 周期，此周期是

$$\beta = (k_{\mathrm{B}}T)^{-1} = 2\pi\kappa_{\mathrm{G}}^{-1}\,。 \tag{9.4.5}$$

具有虚固有时 $u = \mathrm{i}s$ 的德维特–施温格固有时展开为

$$G_{\mathrm{E}}^{DS}(x,x') = \int_0^\infty K_{\mathrm{E}}(x,x',u)\mathrm{d}u\,, \tag{9.4.6}$$

这里

$$\left(\nabla^\mu\nabla_\mu + \frac{1}{6}R\right) G_{\mathrm{E}}(x,x') = -\delta^4(x,x') = -\frac{1}{\sqrt{g}}\delta^4(x-x')\,, \tag{9.4.7}$$

$K_{\mathrm{E}}(x,x',u)$ 称为热核, 它遵循以下方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - \nabla^\mu\nabla_\mu - \frac{1}{6}R\right) K_{\mathrm{E}}(x,x',u) = 0 \tag{9.4.8}$$

及边界条件

$$K_{\mathrm{E}}(x,x',0) = \delta^4(x,x')\,。 \tag{9.4.9}$$

注意：这里格林函数的定义与 5.1 节中格林函数的定义差一负号。为书写简洁，此后略去下标 E。

①因后面会遇到共形因子与外尔曲率张量 $C_{\mu\nu\lambda\sigma}$ 出现在同一表达式中的情况, 故将共形因子改记成 Ω。

解出式 (9.4.8) 中的 $K(x,x',0)$，并把它代入式 (9.4.6)，在 WKB 近似下得到

$$G(\tau,x^i;0,x'^j)=\frac{\kappa_{\rm G}\triangle^{1/2}\sinh\kappa_{\rm G}r}{8\pi^2 r(\cosh\kappa_{\rm G}r-\cos\kappa_{\rm G}\tau)}\,,\tag{9.4.10}$$

其中

$$\begin{aligned}&\triangle=\triangle(x,x')=g^{-\frac{1}{2}}(x)\det\left(-\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^\mu\partial x'^\mu}\right)g^{-\frac{1}{2}}(x')\,,\\&\sigma={}^{(3)}\sigma+\frac{1}{2}(\tau-\tau')^2\quad({}^{(3)}\sigma\text{是 3 维测地线间隔}),\\&r=(2\,{}^{(3)}\sigma)^{\frac{1}{2}}\,,\end{aligned}\tag{9.4.11}$$

当 $x\to x'$ 时，G 发散, 需做如下正规化处理, 即

$$\begin{aligned}G_{\rm ren}(x,x')&=G(x,x')-G^L(x,x')\,,\\G^L(x,x')&=(4\pi)^{-2}\triangle^{\frac{1}{2}}(2\sigma^{-1}+\nu\ln\sigma+\omega)\,,\end{aligned}\tag{9.4.12}$$

其中

$$\nu=\sum_{n=0}^{\infty}\nu_n(x,x')\sigma^n\,,\quad \omega=\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n(x,x')\sigma^n\,,\tag{9.4.13}$$

由 ω_0 递推决定，对于一般的阿达玛解，ω_0 是任意的。令它等于零，则有

$$\begin{aligned}\langle\phi^2\rangle&=G_{\rm ren}=\lim_{x\to x'}[G(x,x')-G^L(x,x')]\,,\\\langle\bar{\phi}^2\rangle&=\bar{G}_{\rm ren}=(288\pi^2)^{-1}\Omega^{-2}(6\kappa_{\rm G}^2+R-\Omega^2\bar{R})\,,\end{aligned}\tag{9.4.14}$$

其中，$\kappa_{\rm G}=(4M)^{-1}$。在反复尝试之后，找到重整化能动张量的一般解，即

$$\begin{aligned}\bar{T}^\mu_\nu=&\,\Omega^{-4}T^\mu_\nu+8\alpha\Omega^{-4}[(C^{\alpha\mu}{}_{\beta\nu}\ln\Omega)_{;\alpha}{}^{;\beta}+\frac{1}{2}R^\beta_\alpha C^{\alpha\mu}{}_{\beta\nu}\ln\Omega]\\&-\beta[(4\bar{R}^\beta_\alpha\bar{C}^{\alpha\mu}{}_{\beta\nu}-2\bar{H}^\mu_\nu)-\Omega^{-4}(4R^\beta_\alpha C^{\alpha\mu}{}_{\beta\nu}-2H^\mu_\nu)]\\&+\frac{1}{6}\gamma[\bar{I}^\mu_\nu-\Omega^{-4}I^\mu_\nu]\,,\end{aligned}\tag{9.4.15}$$

其中，已将 $\langle T^\mu_\nu\rangle_{\rm ren}$ 简记为 T^μ_ν，

$$H_\mu{}^\nu=-R_\mu{}^\alpha R_\alpha{}^\nu+\frac{2}{3}RR_\mu{}^\nu+\left(\frac{1}{2}R^\alpha_\beta R^\beta_\alpha-\frac{1}{4}R^2\right)\delta^\nu_\mu\,,\tag{9.4.16}$$

$$I_\mu{}^\nu=2R_{;\mu}{}^\nu-2RR_\mu{}^\nu+\left(\frac{1}{2}R^2-2R_{;\alpha}{}^\alpha\right)\delta^\nu_\mu\,。\tag{9.4.17}$$

对于欧化施瓦西时空 $(\Lambda=0)$

$${\rm d}\bar{s}^2=\left(1-\frac{2M}{r}\right){\rm d}\tau^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}{\rm d}r^2+r^2{\rm d}\Omega^2\,,\tag{9.4.18}$$

经共形变换

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \Omega^2 \mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \mathrm{d}s^2 \,, \tag{9.4.19}$$

共形于超静时空，

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \mathrm{d}\tau^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^2 \mathrm{d}\Omega^2 \,。\tag{9.4.20}$$

对应于超静时空式 (9.4.20) 中的热态

$$T^{\mu}_{\nu} = \frac{\pi^2}{90} T^4 (4\delta^{\mu}_0 \delta^0_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu}), \qquad T \equiv \frac{1}{8\pi M} = \frac{\kappa_{\mathrm{G}}}{2\pi} \,, \tag{9.4.21}$$

由式 (9.4.15) 得到施瓦西时空中热态的重整化能动张量，即

$$\begin{aligned} \bar{T}^{\mu}_{\nu} = \frac{\pi^2}{90} \left(\frac{1}{8\pi M}\right)^4 \Bigg[& \frac{1 - \left(4 - \frac{6M}{r}\right)^2 \left(\frac{2M}{r}\right)^6}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} \left(4\delta^{\mu}_0 \delta^0_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu}\right) \\ & -24 \left(\frac{2M}{r}\right)^6 \left(3\delta^{\mu}_0 \delta^0_{\nu} + \delta^{\mu}_1 \delta^1_{\nu}\right) \Bigg] \,。\end{aligned} \tag{9.4.22}$$

我们注意，即使回到洛伦兹号差，$\bar{T}^{\mu}_{\nu}$ 也不改变。当 $r \to \infty$ 时，有

$$\rho \equiv \bar{T}^0_0 \to \rho = aT^4 = \frac{\pi^2}{30} (8\pi M)^{-4} \,, \tag{9.4.23}$$

对标量场，$a = \dfrac{\pi^2}{30}$。当 $r \to 2M$ 时，有

$$\rho \equiv \bar{T}^0_0 \to \rho = -12 a T^4 \,, \tag{9.4.24}$$

$$\bar{T}^{\mu}_{\nu}(2M) = -\frac{\pi^2}{90} T^4 [36(\delta^{\mu}_0 \delta^0_{\nu} + \delta^{\mu}_1 \delta^1_{\nu}) + 12(\delta^{\mu}_2 \delta^2_{\nu} + \delta^{\mu}_3 \delta^3_{\nu})] \,。\tag{9.4.25}$$

式 (9.4.24) 的一个有趣推断是，热辐射的态方程可能取十分不同于平直时空的形式，这意味着态方程的引力效应不能忽略。1992 年，李立新和刘辽给出了黑洞外部热辐射的一个新的态方程[80]，此结果引发了汪定雄等一系列有趣的讨论 [81−83]。

9.4.2　瑞斯纳–诺斯特朗时空及一般静态球对称时空中的重整化能动张量

极端瑞斯纳–诺斯特朗时空没有霍金辐射，我们可以把它看成一个 $T = 0$ 的时空。詹尼亚斯 (Zannias) 将上述佩奇 (Page) 方法推广到极端 R-N 时空[84]，求出其布维尔真空的重整化能动量。

进一步，采用佩奇–詹尼亚斯方法可以算出，在任意 R-N 时空的布维尔真空中，共形不变标量场的重正化能动张量为[85]

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathrm{B}}\langle T_\mu^\nu\rangle_{\mathrm{B,ren}} = & \frac{1}{2880\pi^2}\left\{\frac{12}{r^4}q(1-\omega+q)(2\delta_\mu^\nu-5\delta_\mu^0\delta_0^\nu-3\delta_\mu^1\delta_1^\nu)\right. \\
& +\left[\frac{-\omega^2(4-3\omega)^2+8q(1-\omega)(8-4\omega-\omega^2)+16q^2(3-2\omega)}{8r^4(1-\omega+q)^2}\right. \\
& \left.+\frac{8q(1-2\omega+3q)}{r^4}\right](4\delta_\mu^0\delta_0^\nu-\delta_\mu^\nu)+\frac{1}{r^4}\Big[(48-70\omega+91q)q\delta_\mu^\nu \\
& \left.-(3\omega^2+48q-82\omega q+104q^2)(3\delta_\mu^0\delta_0^\nu+\delta_\mu^1\delta_1^\nu)\Big]\right\},
\end{aligned}
\tag{9.4.26}
$$

其中

$$
\omega\equiv\frac{2M}{r},\quad q\equiv\frac{e^2}{r^2}。
$$

此张量在 $r\to\infty$ 时为零，在事件视界上不正则。

当我们考虑 R-N 时空中哈特–霍金真空的重整化能动张量时会发现，哈特–霍金真空的重整化能动张量在事件视界上是正则的，但在柯西视界 (内视界上) 是发散的，这意味着当考虑量子涨落时柯西视界是不稳定的[86]。

用这一方法还可计算出一般静态球对称时空中物质场重整化能动张量[87]，其结果很复杂，这里就不再赘述。需指出，借助一般静态球对称时空中物质场重整化能动张量, 原则上，人们可以求解半经典爱因斯坦方程的自洽解。

9.5 反作用问题的热力学途径 —— 黑洞的膜模型

自从霍金的著名黑洞量子辐射发现以来，关于量子辐射对黑洞的反作用已经做了大量研究。此领域中，几乎所有工作都是首先找到合理的重整化能动张量 $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$，把它作为“源”项，然后尝试近似地求解半经典爱因斯坦方程

$$
G_{\mu\nu}=-\kappa\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle。\tag{9.5.1}
$$

然而，人们对 4 维时空中不同场的“源”项 $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ 知之甚少，且已知的形式也比较复杂，因此实际上所谓的动力学途径应用起来很受限制。

这里介绍一种研究施瓦西时空中反作用问题的热力学方法[88, 89]。此方法的优点是，它能自动给出反作用效应的一些重要结果，而不必知道 $\langle T_{\mu\nu}\rangle$ 的信息及半经典爱因斯坦方程的解。

9.5.1　黑洞热力学与反作用

考虑一个孤立盒子 (任意形状) 包着一个施瓦西黑洞，盒子通过一根细长的管子与一个渐近平直区域的活塞相连 (图 9.4)。设黑洞与其自身的霍金辐射在盒子内达到热平衡。

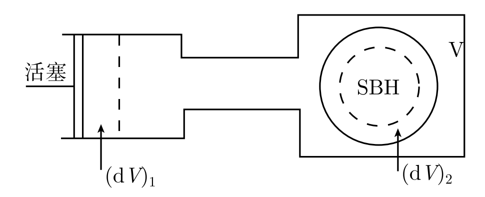


图 9.4　盒子中的黑洞及带有活塞的长管子

如果在施瓦西黑洞与热辐射之间没有相互作用，系统的总能量 E 和总熵 S 分别为

$$E = M_{\mathrm{BH}} + aT^4V\,, \tag{9.5.2}$$

$$S = 4\pi M_{\mathrm{BH}}^2 + \frac{4}{3}aT^3V\,, \tag{9.5.3}$$

其中，热辐射的表达式恰是它在平直时空中的样子，V 是盒子中热辐射所占据的体积。

然而，施瓦西黑洞与热辐射的相互作用若不能被忽略，系统的总能量和总熵就应分别写为

$$E = M_{\mathrm{BH}} + M_{\mathrm{H}} + aT^4V \tag{9.5.4}$$

和

$$S = S_{\mathrm{BH}} + S_{\mathrm{H}} + S_{\mathrm{R}} = 4\pi M_{\mathrm{BH}}^2 + S_{\mathrm{H}} + \frac{4}{3}aT^3V, \tag{9.5.5}$$

其中, M_{H} 和 S_{H} 是相互作用项，包括霍金辐射对施瓦西黑洞的反作用。从式 (9.5.4) 和式 (9.5.5) 知，对于绝热过程，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E &= \mathrm{d}M_{\mathrm{H}} - T\mathrm{d}S_{\mathrm{H}} - \frac{1}{3}aT^4\mathrm{d}V\\ &= \mathrm{d}M_{\mathrm{H}} - T\mathrm{d}S_{\mathrm{H}} - \frac{1}{3}aT^4(\mathrm{d}V)_2 - \frac{1}{3}aT^4(\mathrm{d}V)_1\,,\end{aligned} \tag{9.5.6}$$

这里我们已把 $\mathrm{d}V$ 拆成两部分，即

$$\mathrm{d}V = (\mathrm{d}V)_1 + (\mathrm{d}V)_2\,, \tag{9.5.7}$$

其中，$(\mathrm{d}V)_1$ 是运动活塞造成的体积变化，$(\mathrm{d}V)_2$ 是施瓦西黑洞事件视界膨胀或收缩造成的洞外空间体积变化，只要霍金蒸发不能忽略，原则上它不应是零。

式 (9.5.6) 右边最后一项是绝热过程中系统对环境所做的功，是可以存在的仅有的项。所以，应该有以下等式

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_{\mathrm{H}} = \mathrm{d}M_{\mathrm{H}} &= T\mathrm{d}S_{\mathrm{H}} + \frac{1}{3}aT^4(\mathrm{d}V)_2 \\ &= T\mathrm{d}S_{\mathrm{H}} - \frac{1}{3}aT^4(-\mathrm{d}V)_2\,。 \end{aligned} \tag{9.5.8}$$

对于一个具有能量 E_{H} 和熵 S_{H} 的 2 维热力学膜，热力学第一定律写为

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{H}} = T\mathrm{d}S_{\mathrm{H}} + \sigma\mathrm{d}A_{\mathrm{H}}\,, \tag{9.5.9}$$

其中, A 是膜的面积，σ 是膜的表面张力。如果

$$\sigma\mathrm{d}A_{\mathrm{H}} = \frac{1}{3}aT^4(\mathrm{d}V)_2\,, \tag{9.5.10}$$

或

$$\sigma = \frac{1}{3}aT^4(\mathrm{d}V)_2/\mathrm{d}A_{\mathrm{H}}\,, \tag{9.5.11}$$

则式 (9.5.8) 和式 (9.5.11) 的一个自然物理推断是，我们可以把事件视界的面积 A_{H} 视为一个 2 维热力学膜，它具有能量 E_{H}、熵 S_{H} 和表面张力 σ。所以，式 (9.5.8) 是事件视界膜 (event horizon membrane, EHM) 的热力学第一定律，式 (9.5.10) 是 EHM 膨胀或收缩时对辐射所做的功。

所以，在弯曲时空中由施瓦西黑洞和热辐射组成的热力学系统可以当成平直时空中由施瓦西黑洞、热辐射和一个 2 维热力学膜 (事件视界) 组成的热力学系统来处理。我们将看到，这一观点可以大大简化弯曲时空中热力学的研究。

现在，让我们进一步对 2 维 EHM 引进如下的热力学特征函数，即

$$\text{自由能:}\qquad F_{\mathrm{H}} = E_{\mathrm{H}} - TS_{\mathrm{H}}\,, \tag{9.5.12}$$

$$\text{焓:}\qquad H_{\mathrm{H}} = E_{\mathrm{H}} - \sigma A_{\mathrm{H}}\,, \tag{9.5.13}$$

$$\text{自由焓:}\qquad G_{\mathrm{H}} = F_{\mathrm{H}} - \sigma A_{\mathrm{H}}\,, \tag{9.5.14}$$

则有

$$\mathrm{d}H_{\mathrm{H}} = T\mathrm{d}S_{\mathrm{H}} - A_{\mathrm{H}}\mathrm{d}\sigma\,, \tag{9.5.15}$$

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{H}} = -S_{\mathrm{H}}\mathrm{d}T + \sigma\mathrm{d}A_{\mathrm{H}}\,, \tag{9.5.16}$$

$$\mathrm{d}G_{\mathrm{H}} = -S_{\mathrm{H}}\mathrm{d}T - A_{\mathrm{H}}\mathrm{d}\sigma\,。 \tag{9.5.17}$$

式 (9.5.9) 和式 (9.5.16) 给出

$$\left(\frac{\partial S_{\mathrm{H}}}{\partial A_{\mathrm{H}}}\right)_T = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_{A_{\mathrm{H}}}\,, \tag{9.5.18}$$

和

$$\left(\frac{\partial E_{\rm H}}{\partial A_{\rm H}}\right)_T = -T\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_{A_{\rm H}} + \sigma, \tag{9.5.19}$$

所以

$$S_{\rm H} = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_{A_{\rm H}} A_{\rm H} + C_{\rm S}\,, \tag{9.5.20}$$

$$E_{\rm H} = -T\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_{A_{\rm H}} A_{\rm H} + \sigma A_{\rm H} + C_{\rm E}\,, \tag{9.5.21}$$

其中，$C_{\rm S}$ 和 $C_{\rm E}$ 是两个积分常数，它们最多依赖于温度。从量纲考虑，有

$$({\rm d}V)_2 = -32\pi\lambda M_{\rm BH}^2 {\rm d}M_{\rm BH} \tag{9.5.22}$$

其中，λ 是一个未确定的无量纲正常数。式 (9.5.22)、式 (9.5.11)、式 (9.5.20) 和式 (9.5.21) 给出熵的面密度和能量面密度，即

$$\sigma_{\rm S} \equiv \frac{S_{\rm H}}{A_{\rm H}} = \frac{\lambda}{8\pi}aT^2 + \frac{C_{\rm S}}{A_{\rm H}} = \frac{\lambda}{(8\pi)^3}aM_{\rm BH}^{-2} + \frac{C_{\rm S}}{16\pi}M_{\rm BH}^{-2}, \tag{9.5.23}$$

和

$$\sigma_{\rm E} \equiv \frac{E_{\rm H}}{A_{\rm H}} = \frac{\lambda}{12\pi}aT^3 + \frac{C_{\rm E}}{A_{\rm H}} = \frac{\lambda}{12\pi(8\pi)^3}aM_{\rm BH}^{-3} + \frac{C_{\rm E}}{16\pi}M_{\rm BH}^{-2}, \tag{9.5.24}$$

这里用了平衡温度

$$T = \frac{1}{8\pi M_{\rm BH}}。 \tag{9.5.25}$$

在 9.5.2 节中我们将指出，在由盒子中的施瓦西黑洞和辐射组成的热力学系统中，方程 (9.5.25) 是唯一合理的平衡温度，所以视界上的总能量和总熵分别是

$$E_{\rm H} = \frac{4\lambda}{3}\frac{a}{(8\pi)^3}M_{\rm BH}^{-1} + C_{\rm E}, \tag{9.5.26}$$

和

$$S_{\rm H} = 2\lambda\frac{a}{(8\pi)^2} + C_{\rm S}。 \tag{9.5.27}$$

“穿上衣服”的施瓦西黑洞的总能量和总熵分别是

$$E_{\rm dressed} \equiv M_{\rm dressed} = M_{\rm BH}\left[1 + \frac{4\lambda}{3}\frac{a}{(8\pi)^3}\frac{1}{M_{\rm BH}^2}\right] + C_{\rm E} \tag{9.5.28}$$

和

$$S_{\rm dressed} = 4\pi M_{\rm BH}^2\left[1 + 4\lambda\frac{a}{(8\pi)^3}\frac{1}{M_{\rm BH}^2}\right] + C_{\rm S}, \tag{9.5.29}$$

此结果意味着，只要施瓦西黑洞与它的霍金辐射处于热平衡，黑洞就穿上了衣服。这正是霍金辐射与黑洞相互作用的结果，所以热平衡中的施瓦西黑洞自动包含了霍金辐射对黑洞的反作用。

当 $C_{\mathrm{E}}=0$、$\lambda=3C_0$ 时，方程 (9.5.28) 正是约克 (York) 在他的反作用方案中得到的结果式 (5.4)[90]。在约克的论文中，C_0 是一个特别的、没有确定的积分常数。显然，式 (9.5.28) 和式 (9.5.29) 中的第二项反映辐射对施瓦西黑洞的反作用。

对于很大的施瓦西黑洞，或者说

$$M_{\mathrm{BH}}^2 \gg \lambda \frac{a}{(8\pi)^3} \tag{9.5.30}$$

的情况，式 (9.5.28) 和式 (9.5.29) 意味着

$$E_{\text{dressed}} = M_{\text{dressed}} \approx M_{\mathrm{BH}}, \tag{9.5.31}$$

$$S_{\text{dressed}} \approx S, \tag{9.5.32}$$

即此时反作用可以被忽略，这当然是合理的。

因为式 (9.5.30) 的量纲是质量平方，由 3 个基本常数 G、$\hbar$ 和 c 组成的质量量纲的量是普朗克质量 M_{p}^2，所以式 (9.5.30) 可改写为

$$M_{\mathrm{BH}}^2 > \frac{\lambda}{8^3 \times 15\pi} M_{\mathrm{p}}^2 。 \tag{9.5.33}$$

(此处的 $a=\pi^2/15$ 是按电磁辐射取的)。如果黑洞质量的下限恰是 M_{p}，则

$$\lambda \approx 8^3 \times 15\pi \tag{9.5.34}$$

或

$$C_0 \approx 8^3 \times 15\pi \tag{9.5.35}$$

所以，一旦假定了施瓦西黑洞的质量下限是 M_{p}，就能确定常数 λ 或 C_0 的量级。

9.5.2　不确定性和它们的消除

当考虑反作用的时候，我们引进了施瓦西黑洞的两种不同的质量，裸质量 M_{BH} 和“穿衣”质量 M_{dressed}。后者在约克的论文[90] 中就是 $C_{\mathrm{E}}=0$ 时的 M_{BH}。

现在温度不确定性出现了。上面质量中的哪一个与式 (9.5.25) 中的系统平衡温度相联系呢？让我们暂时假定各个热力学客体的温度有不同值，分别用 T_{R} 和 T_{H} 表示辐射温度和黑洞温度。利用式 (9.5.5)、式 (9.5.11) 和式 (9.5.9) 可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S = &\left(8\pi M_{\mathrm{BH}} - \frac{1}{T_{\mathrm{H}}}\right)\mathrm{d}M_{\mathrm{BH}} + \left(\frac{1}{T_{\mathrm{R}}} - \frac{1}{T_{\mathrm{H}}}\right)V\mathrm{d}(aT_{\mathrm{R}}^4) \\ &+ \left(\frac{1}{3}aT_{\mathrm{R}}^3 - \frac{\sigma_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{H}}}\frac{\mathrm{d}A_{\mathrm{H}}}{(\mathrm{d}V)_2}\right)(\mathrm{d}V)_2 。\end{aligned} \tag{9.5.36}$$

一个孤立系统的热平衡要求熵达到极大值，即

$$\mathrm{d}S = 0, \quad \mathrm{d}^2 S < 0\,, \tag{9.5.37}$$

在不改变总能量和总体积的条件下,

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}E = \mathrm{d}M_{\mathrm{BH}} + \mathrm{d}M_{\mathrm{H}} + \mathrm{d}(aT^4V) = 0,\\&(\mathrm{d}V)_1 = 0,\end{aligned} \tag{9.5.38}$$

从式 (9.5.37) 和式 (9.5.36) 可得

$$T_{\mathrm{R}} = T_{\mathrm{H}} = \frac{1}{8\pi M_{\mathrm{BH}}} = T\,。 \tag{9.5.39}$$

这就证实我们在前面所谈的观点：只是施瓦西黑洞的裸质量决定系统的平衡温度。从式 (9.5.28) 可有

$$M_{\mathrm{BH}} \approx M_{\mathrm{dressed}}\left[1 - \frac{4\lambda}{3}\frac{a}{(8\pi)^3}\frac{1}{M^2_{\mathrm{dressed}}}\right], \tag{9.5.40}$$

把式 (9.5.40) 代入式 (9.5.25)，可得

$$T \approx \frac{1}{8\pi M_{\mathrm{dressed}}}\left[1 + \frac{4\lambda}{3}\frac{a}{(8\pi)^3}\frac{1}{M^2_{\mathrm{dressed}}}\right], \tag{9.5.41}$$

如果

$$\lambda = \frac{(k_0 + 12)\pi^2}{10}a^{-1}\,, \tag{9.5.42}$$

或

$$k_0 \approx 1.9 \times 10^{-10} - 12 > -12 \qquad (\text{当}\lambda \approx 8^3 \times 15\pi)\,, \tag{9.5.43}$$

这正是约克得到的结果

$$T \approx \frac{1}{8\pi M_{\mathrm{dressed}}}\left(1 + \frac{k_0 + 12}{3840\pi}\frac{1}{M^2_{\mathrm{dressed}}}\right)。 \tag{9.5.44}$$

现在让我们考虑熵的不确定性。“穿衣”施瓦西黑洞的、移动了的事件视界的位置和改变了视界的面积。现在是

$$r^{\mathrm{dressed}}_{\mathrm{EH}} = 2M_{\mathrm{dressed}}\,, \tag{9.5.45}$$

和

$$A_{\mathrm{dressed}} = 4\pi(r^{\mathrm{dressed}}_{\mathrm{EH}})^2 = 16\pi M^2_{\mathrm{dressed}}\,。 \tag{9.5.46}$$

如果定义“穿衣”施瓦西黑洞的熵为

$$S_{\mathrm{dressed}} = \frac{1}{4}A_{\mathrm{dressed}}\,, \tag{9.5.47}$$

则

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{dressed}} &= 4\pi M_{\mathrm{dressed}}^2 = 4\pi M_{\mathrm{BH}}^2\left[1+\frac{4\lambda}{3}\frac{a}{(8\pi)^3}\frac{1}{M_{\mathrm{BH}}^2}\right]^2 \\ &\approx 4\pi M_{\mathrm{BH}}^2\left[1+\frac{8\lambda}{3}\frac{a}{(8\pi)^3}\frac{1}{M_{\mathrm{BH}}^2}\right]。 \end{aligned} \tag{9.5.48}$$

这样，似乎有两种不同的熵，一个用式 (9.5.29) 定义，另一个用式 (9.5.48) 定义。但是这一不确定性可以通过使式 (9.5.29) 中的 C_{S} 等于 $-(2\lambda/3)[a/(8\pi)^2]$ 来消除。所以，霍金辐射作用在施瓦西黑洞上的反作用是把黑洞熵从 $4\pi M_{\mathrm{BH}}^2$ 改变到

$$4\pi M_{\mathrm{BH}}^2\left[1+\frac{8\lambda}{3}\frac{a}{(8\pi)^3}\frac{1}{M_{\mathrm{BH}}^2}\right]。 \tag{9.5.49}$$

形式上，我们可以把 S_{dressed} 表示为一个表面熵 $\frac{1}{4}A_{\mathrm{dressed}}$，但是实际上 S_{BH} 和 S_{H} 之间有一个重要区别，即 $S_{\mathrm{BH}} \propto A_{\mathrm{H}}$、$S_{\mathrm{H}} = \mathrm{const}$。如果我们把 S_{BH} 归因于形成黑洞的坍缩星的物质熵，那么 S_{H} 就可能是其他的某种东西，可它又是什么呢？在纽曼 (Newman)- 彭罗斯形式中，外尔张量可表示成 5 个复标量函数 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_2、Ψ_3 和 Ψ_4，并且可用它们对时空几何进行分类。在广义相对论中，所有渐近平直黑洞解都是佩特罗夫 (Petrov)D 型的，即仅有 Ψ_2 是非零函数。对于施瓦西黑洞

$$\Psi_2 = \frac{M_{\mathrm{BH}}}{r^3}\,, \tag{9.5.50}$$

从式 (9.5.23) 可得

$$\sigma_{\mathrm{S}} \sim a\,|\Psi_2|_{r=2M_{\mathrm{BH}}}\,, \tag{9.5.51}$$

这意味着施瓦西黑洞视界上的表面熵密度是外尔张量的函数！它可能正是彭罗斯早年预言的引力场的引力熵。如果确实如此，上述结果表明，热平衡中的施瓦西黑洞应该自动地包含了引力场的熵，否则不可能实现热平衡。

此方法同样可以用来研究克尔黑洞[91] 和克尔–纽曼黑洞[92] 与其霍金辐射平衡的问题。

9.6 引力热力学

物质场 ϕ 从 $|\phi_1, t_1\rangle$ 到 $|\phi_2, t_2\rangle$ 的散射幅为

$$\langle\phi_2, t_2|\phi_1, t_1\rangle = \int D[\phi]\mathrm{e}^{\mathrm{i}S}, \tag{9.6.1}$$

采用薛定谔绘景，上面的振幅可以重写为

$$\langle\phi_2|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t_2-t_1)}|\phi_1\rangle\,。\tag{9.6.2}$$

如果时间有一个虚周期

$$t_2-t_1=-i\beta,\quad \phi_2=\phi_1=\phi\,,\tag{9.6.3}$$

则

$$\begin{aligned}\langle\phi|\mathrm{e}^{-H\beta}|\phi\rangle&=\sum_{n,m}\lambda_m^*\lambda_n\langle\phi_m|\mathrm{e}^{-H\beta}|\phi_n\rangle\\&=\sum_{n,m}\lambda_m^*\lambda_n\langle\phi_m|\phi_n\rangle\mathrm{e}^{-E_n\beta}=\sum_n|\lambda_n|^2\mathrm{e}^{-E_n\beta}=Z\\&=\text{正则系综的配分函数},\end{aligned}\tag{9.6.4}$$

其中

$$\begin{aligned}&H|\phi_n\rangle=E_n|\phi_n\rangle\,,\\&\phi=\sum_n\lambda_n\phi_n\,,\\&\langle\phi_n|\phi_m\rangle=\delta_{nm}\,,\end{aligned}\tag{9.6.5}$$

$$|\lambda_n|^2\ \text{是系统处于属于}\ E_n\ \text{本征态的简并度。}\tag{9.6.6}$$

上面的结果意味着：如果时间有一个虚周期，并且采用薛定谔绘景，跃迁幅恰是正则系综的配分函数。对泛函积分 (9.6.1) 欧氏化后，配分函数可写成

$$Z=\int D[\phi]\mathrm{e}^{-I(\phi)}\simeq\mathrm{e}^{-I(\phi)}\,,\tag{9.6.7}$$

或

$$\ln Z\simeq -I(\phi)\qquad(\text{用鞍点近似})\,。\tag{9.6.8}$$

上面的结果可以推广到引力场 $\boldsymbol{g}$, 即如果时间有虚周期且采用薛定谔绘景，则有

$$Z=\int D[\boldsymbol{g}]\mathrm{e}^{-I[\boldsymbol{g}]}=\langle h_{ik}^{(2)},t_2|h_{ik}^{(1)},t_1\rangle\simeq\mathrm{e}^{-I(\boldsymbol{g})},\tag{9.6.9}$$

或

$$\ln Z=-I(\boldsymbol{g})\quad(\text{鞍点近似})。\tag{9.6.10}$$

为简单起见，假定系统不存在简并。从

$$S=-\sum_n P_n\ln P_n,\qquad P_n=Z^{-1}\exp\left(-\beta E_n\right),\tag{9.6.11}$$

分别得到引力系统的熵 S 和能量 $\langle E\rangle$，即

$$S=\beta\langle E\rangle+\ln Z\,, \tag{9.6.12}$$

$$\langle E\rangle=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z\,, \tag{9.6.13}$$

这就是所谓的引力热力学关系。

例 对施瓦西黑洞

$$I=\beta^2/16\pi=\text{吉本斯 (Gibbons)- 霍金表面项}^{[93]}, \tag{9.6.14}$$

$$\ln Z=-I=-\beta^2/16\pi\sim\text{零级鞍点近似}, \tag{9.6.15}$$

$$\langle E\rangle=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z=M\,, \tag{9.6.16}$$

$$S=\beta\langle E\rangle+\ln Z=4\pi M^2=\frac{1}{4}A_{\mathrm{H}}\,, \tag{9.6.17}$$

其中

$$\beta=(k_{\mathrm{B}}T)^{-1}=8\pi M\,, \tag{9.6.18}$$

此结果与 4.3.2 节的结果精确一致。我们把对吉本斯–霍金表面项的介绍放到第 10 章进行。

9.7 量子施瓦西黑洞和暗物质

引力量子化是有待解决的一个基本物理问题。迄今尚缺少一个成熟的量子引力理论，这有一点像处于早期量子力学的玻尔–索末菲 (Bohr-Sommerfeld) 时代。在这种情况下，寻找一条半经典途径来处理引力场量子化，可能是一个通向未来引力场量子化的一个初级而有意义的尝试。下面就来介绍这样一种尝试[9, 94]。

对于经典力学中的单周期运动, 可定义一个作用量变量[95]

$$S_v=\oint p\mathrm{d}q\,, \tag{9.7.1}$$

它实际是单周期运动系统于一个周期内在相空间中所扫过的面积。对于单周期运动，系统的作用量 S、作用量变量 S_v 和哈密顿 (Hamilton) 量 H 之间存在关系[96]

$$S=S_v-\oint H\mathrm{d}t\,。 \tag{9.7.2}$$

在不考虑吉本斯–霍金表面项的情况下，H 应满足所谓哈密顿约束①

$$H(h_{ij},\pi_{ij})=0, \tag{9.7.3}$$

① 详细讨论见第 10 章。

其中，h_{ij}、π_{ij} 分别是引力系统在 1+3 分解中类空超曲面上的度规和相应的正则共轭动量。在考虑吉本斯–霍金表面项的情况下 (如一切渐近平直的黑洞)，式 (9.7.3) 的 H 应代之以

$$H' = H + \alpha\,, \tag{9.7.4}$$

其中

$$\alpha = \lim_{r\to\infty}\oint_{S_r}\left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{jj}}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}S^i\,, \tag{9.7.5}$$

其中，S_r 是半径为 r 的球面，$\mathrm{d}S^i$ 是球面上的面元。于是，式 (9.7.2) 应改为

$$S = S_v - \oint H'\mathrm{d}t\ 。 \tag{9.7.6}$$

这里要特别强调，在渐近平直情况下，任一经典爱因斯坦引力系统的哈密顿量 H' 就是系统的阿德勒 - 戴瑟 - 米斯纳 (Adler-Deser-Misner, ADM) 质量 M，因此对于“任一单周期”且渐近平直的引力系统而言，应有

$$S = S_v - \oint H'\mathrm{d}t = \oint p\mathrm{d}q - M\oint \mathrm{d}t\ 。 \tag{9.7.7}$$

1916 年，索末菲在原子物理中引进了所谓索末菲作用量变量的量子化条件[97]

$$\oint p\mathrm{d}q = nh \quad (h \sim \text{普朗克常量})\,, \tag{9.7.8}$$

成功地解决了原子物理中的线状光谱问题。以后，朗道 (Landau) 与栗弗席兹 (Lifshitz) 采用准经典方法重新推导了索末菲作用量变量的量子化条件，并将其修正为[98]

$$\oint p\mathrm{d}q = 2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)\ 。 \tag{9.7.9}$$

由于式 (9.7.8) 和式 (9.7.9) 并不明显地与背景时空度规有关, 因而把它们移植到广义相对论中，用索末菲作用量变量量子化的思想来探讨施瓦西黑洞的量子化问题。为此，我们要先把式 (9.7.7) 做欧化处理，即

$$I = I_v - \oint H'\mathrm{d}\tau = \oint p_{\mathrm{E}}\mathrm{d}q - M\beta, \tag{9.7.10}$$

其中，p_{E} 是欧化动量，β 是虚时周期。其次，在施瓦西黑洞理论中，一个具有最大解析区和最高完备性的坐标覆盖是克鲁斯卡尔解，将其欧化后为

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{E}}^2 = \frac{32}{r}M^3\exp\left(-\frac{r}{2M}\right)(\mathrm{d}\mathcal{T}^2 + \mathrm{d}\mathcal{R}^2) + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2, \tag{9.7.11}$$

它覆盖 $r > 2M$ 的区域，其中

$$\mathcal{T} = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{r}{4M}\right)\sin\left(\frac{\tau}{4M}\right), \tag{9.7.12}$$

$$\mathcal{R} = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{4M}\right) \cos\left(\frac{\tau}{4M}\right), \tag{9.7.13}$$

显然可见，此时虚时 $\mathcal{T}$ 和径向坐标 $\mathcal{R}$ 都是 $\tau = \mathrm{i}t$ 的周期函数，其周期为

$$\beta = 8\pi M\,。 \tag{9.7.14}$$

而式 (9.7.11) 所描述的欧化施瓦西度规是一个周期为 $\beta = 8\pi M$ 的单周期引力系统。大家知道，欧几里得克鲁斯卡尔坐标的这一重要性质对揭示施瓦西黑洞的热力学性质有重要意义。下面，我们将看到这一重要性质对施瓦西黑洞的量子性质也起着关键性的作用。

由经典黑洞理论知，施瓦西黑洞的视界面积 A 为

$$A = 16\pi M^2 \tag{9.7.15}$$

由式 (9.6.15) 知其欧氏作用量 I 为

$$I = 4\pi M^2\,。 \tag{9.7.16}$$

应注意，对于在 $r > 2M$ 内的真空施瓦西黑洞，作用量 I 中的体积分贡献为零，不为零的贡献仅来自吉本斯–霍金表面项 $4\pi M^2$，由式 (9.7.10)、式 (9.7.14) 和式 (9.7.16) 可得出

$$12\pi M^2 = \int p_{\mathrm{E}} \mathrm{d}q。 \tag{9.7.17}$$

仿照朗道 - 栗弗席兹的结果，将索末菲量子化条件写成

$$\int p_{\mathrm{E}} \mathrm{d}q = 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right) M_{\mathrm{p}}^2\,, \tag{9.7.18}$$

其中，$M_{\mathrm{p}} = (G^{-1}\hbar c)^{\frac{1}{2}}$ 是普朗克质量，则

$$M^2 = \frac{1}{6}\left(n + \frac{1}{2}\right) M_{\mathrm{p}}^2 \tag{9.7.19}$$

$$A = \frac{8\pi}{3}\left(n + \frac{1}{2}\right) l_{\mathrm{p}}^2\,, \tag{9.7.20}$$

其中，$l_{\mathrm{p}}^2 = G\hbar c^{-3}$ 是普朗克面积。式 (9.7.19) 给出施瓦西黑洞质量的量子化条件，即

$$M = \sqrt{\frac{1}{6}\left(n + \frac{1}{2}\right)} M_{\mathrm{pl}}。 \tag{9.7.21}$$

而式 (9.7.21) 是施瓦西黑洞视界面积的量子化条件。

不难看出，量子施瓦西黑洞的霍金辐射是一个不连续的分立过程，过程中辐射量子的质量或能量 δM 为

$$\delta M = \frac{1}{12}\frac{M_{\mathrm{p}}^2}{M_T}, \tag{9.7.22}$$

其中，M_T 是温度为 T 时施瓦西黑洞的量子化的质量。由式 (9.7.20) 可以得到施瓦西黑洞的霍金辐射过程中，视界面积量子为

$$\delta A = \frac{8\pi}{3} l_{\mathrm{p}}^2。 \tag{9.7.23}$$

应指出，采用不同的量子化方案，这个量子化值中的系数可能取不同的结果，例如，德雷尔 (Dreyer) 等经由圈量子化所得的面积量子为$(4\ln 3)l_{\mathrm{p}}^2$ [99]。

式 (9.7.21) 中 $n=0$ 对应着量子施瓦西黑洞的基态质量 M_{G}, 即

$$M_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} M_{\mathrm{p}}。 \tag{9.7.24}$$

量子施瓦西黑洞在演化中存在一个基态质量，表示量子施瓦西黑洞有一个最小质量。任何量子过程不可能使得一个量子施瓦西黑洞的质量低于其基态质量 M_{G}。这意味着一个进入晚期强烈喷射的施瓦西黑洞，量子力学的能量量子化规则将迫使它在到达基态时停止辐射，结果是任何蒸发的量子黑洞最后均有一个质量为 $M_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} M_{\mathrm{p}}$ 的遗迹，霍金蒸发不会把量子施瓦西黑洞化为乌有!

由于量子施瓦西黑洞的遗迹不再包含有霍金量子辐射在内的任何其他经典辐射，其存在只能通过引力作用来探测，可把此类遗迹称为暗物质或“暗星”。天文观测中通过星系的转动曲线探测出的暗物质有可能就是这种量子黑洞的遗迹或暗星。泽尔多维奇 (Zeldovich)、诺维科夫 (Novikov)[100] 与凯尔 (Carr)、霍金[101] 等曾指出，极早期宇宙物质密度的涨落将产生大量的原初小黑洞，霍金等曾认为凡寿命小于宇宙年龄的原初小黑洞都已完全蒸发掉。上述结果表明，凡寿命小于当前宇宙年龄的原初小黑洞并未消失，而是作为原初小黑洞的遗迹变为暗星或暗物质保存了下来，可认为星系的转动曲线所发现的暗星与暗物质为这种量子黑洞理论和泽尔多维奇、诺维科夫与凯尔、霍金等的原初小黑洞理论提供了天文观测证据。

第 10 章　量子宇宙学

10.1　引力场量子化的几种方案

按广义相对论，度规张量 $g_{\mu\nu}$ 既是引力场的动力学变量，又是具有一定因果结构的时空背景度规。直接应用通常量子场论的正则量子化来对引力场进行量子化，在概念上存在无法克服的困难。先抛开这些概念上的根本困难，在实际中存在着下述常见的引力场量子化方案。

10.1.1　微扰量子化

令

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{10.1.1}$$

其中，$\eta_{\mu\nu}$ 为具有确定因果结构的闵可夫斯基时空背景度规；$h_{\mu\nu}$ 为小量，代表引力场。

不难证明爱因斯坦引力场方程 $G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$ 可简化为

$$\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\Box h \cdot \eta_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}\text{。} \tag{10.1.2}$$

引入

$$\chi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}\,, \tag{10.1.3}$$

在弱场近似下，爱因斯坦引力场方程可化为

$$\Box\chi_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}\text{。} \tag{10.1.4}$$

现在可以在背景时空 $\eta_{\mu\nu}$ 上对 $h_{\mu\nu}(x)$ 进行量子化。结果是：对自由引力场 ($T_{\mu\nu} = 0$)，可以证明 $h_{\mu\nu}$ 是一个二级洛伦兹张量场，它代表 $m_0 = 0$、$s = 2$ 的引力场，并且单圈是可重整的。

对有源引力场 ($T_{\mu\nu} \neq 0$)，注意到耦合常数

$$[\kappa] = \left[\frac{8\pi G}{c^4}\right] = [G] = M^{-2} \quad (c = \hbar = 1)\,, \tag{10.1.5}$$

由重整化理论可知，单圈是不可重整的。

10.1.2　非微扰量子化

1. 路径积分量子化

$$\Psi(h_{\mu\nu},\phi)=\sum_M\int_C D[g]D[\phi]\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(g,\phi)}, \tag{10.1.6}$$

其中，$h_{\mu\nu}$ 是类空超曲面上的诱导度规，$\int_C$ 表示在给定拓扑流形上对满足给定条件的各种可能历史路径作泛函积分，$\sum_M$ 表示对所有可能的不同拓扑流形求和。

这种量子化存在的问题是：

(1) 严格说来，刘维尔 (Liouville) 测度

$$D[g]=\prod_{i=1}^{\infty}\mathrm{d}g_{\mu\nu}^{(i)} \tag{10.1.7}$$

在数学上无定义。

(2) 仅当欧氏化

$$S=\mathrm{i}I \tag{10.1.8}$$

之后才有意义，但是 I 无下界，其正定性无保证，故积分不收敛。通常认为引入复中间几何可以使其收敛。

(3) 实际计算时，多采用鞍点近似，这事实上也是一种微扰展开。

2. 正则量子化 (ADM 方案)

把时空作 1+3 分解：$M=\mathbb{R}\times\Sigma_3$, Σ_3 为某个 3 维类空超曲面，对经典作用量变分可以得到两个约束，量子化后即得

$$\hat{H}\Psi=0\quad\sim\quad\text{惠勒–德维特方程,} \tag{10.1.9}$$

$$\hat{H}_i\Psi=0\quad\sim\quad\text{波函数在 }\Sigma_3\text{ 上的微分同胚不变性。} \tag{10.1.10}$$

这种量子化存在问题：类似克莱因–戈登方程，无法定义希尔伯特空间。一般可用三次量子化的方法解决这个问题，但从量子引力理论看，这是很不自然的。

3. 阿希提卡 (Ashtekar) 量子化

代之以度规，引入标架密度和与其共轭的自对偶复联络，以自对偶联络为基本变量，在联络空间可以得到标量约束、矢量约束和规范约束，它们的组合可以给出哈密顿约束和微分同胚约束；引入联络空间上的波泛函，正则量子化后得到相应的量子联络动力学方程。

阿希提卡的这一表述可把动力学方程变为多项式的形式，从而可以借助杨 - 米尔斯 (Mills) 规范理论来研究广义相对论。但是，为与经典量对比，还需引入实数性条件，而实数性条件不是第一类约束，再次使问题变得复杂了。若把自对偶的复联络改为实联络，则动力学方程就不再是多项式形式了。

4. 圈量子化

在阿希提卡变量的基础上，进一步引入圈变量，并在圈空间上得到哈密顿约束和微分同胚约束，引入圈空间上的波泛函，并进行量子化。圈量子化是解决量子引力的一条新途径，目前理论研究相对较多，也取得了一些进展，但距完备的引力量子化理论还有很长的路要走。

10.2　路径积分量子化

众所周知，满足薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \tag{10.2.1}$$

的量子动力学系统的波函数 $\Psi(x,t)$ 可以等价地表为路径积分的形式，即

$$\Psi(x,t) = N\int_C D[x(t)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[x(t)]}, \tag{10.2.2}$$

其中，H 为系统的哈密顿量，S 为系统的经典作用量，C 是满足给定条件 (终点为 x,t) 的各种可能路径，其中的任一路径是从某一确定初态 $|i\rangle = |x_i,t_i\rangle$ 到确定末态 $|f\rangle = |x,t\rangle$，所以

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\langle x,t|x_i,t_i\rangle\,\Psi(x_i,t_i)\mathrm{d}x_i。$$

完全类似，我们可以把宇宙波函数 $\Psi(h_{ij},\phi)$ 写成路径积分量子化的形式，即

$$\Psi(h_{jk},\phi) = \sum_{\mathcal{M}}\int_C D[g]D[\phi]\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(g,\phi)}\,, \tag{10.2.3}$$

其中，$\sum\limits_{\mathcal{M}}$ 是对所有可能的不同拓扑流形求和， S 是含引力场和物质场系统的经典作用量，C 是满足给定条件 (末态 3 几何和物质场分别为 h_{jk} 和 ϕ) 的各种可能“路径”，每一“路径”是从某一初态 $|i\rangle = |h^i_{jk},\phi^i\rangle$ 到确定末态 $|f\rangle = |h_{jk},\phi\rangle$，而 $\Psi(h_{jk},\phi) = \displaystyle\int D[g^i]D[\phi^i]\langle f|i\rangle\,\Psi(h^i_{jk},\phi^i)$。如果初态只有一个 $|i\rangle$，它是没有时间、没有空间、没有度量、也没有物质场的态，记作 $|无\rangle$，那么 $\Psi(h_{jk},\phi) = \langle f|无\rangle$ 就代表

在某个类空超曲面 (h_{jk},ϕ) 上宇宙从无创生的几率幅。把宇宙初态取为无，这是由逻辑上的简单、理论上的自足所要求的。

为了使式 (10.2.2) 和式 (10.2.3) 有确定值，我们需要在复 t 平面内把实时作威克 (Wick) 转动或作延拓 $t\to -\mathrm{i}\tau$，即欧氏化，这时实作用量 S 解析延拓到复作用量 $\mathrm{i}I$, 即

$$S=\int\mathscr{L}\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\to \mathrm{i}\int\mathscr{L}_{\mathrm{E}}\sqrt{g_{\mathrm{E}}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x^3=\mathrm{i}I\quad(\mathscr{L}_{\mathrm{E}}\equiv-\mathscr{L}),\tag{10.2.4}$$

$I=\displaystyle\int\mathscr{L}_{\mathrm{E}}\sqrt{g_{\mathrm{E}}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x^3$ 称为欧氏作用量，是实的。故欧氏化后式 (10.2.2) 和式 (10.2.3) 分别可写为

$$\varPsi(x,t)=N\int_C D[x(\tau)]\mathrm{e}^{-I[x(\tau)]},\tag{10.2.5}$$

$$\varPsi(h_{ij},\phi)=\sum_{\mathcal{M}}\int_C D[g_{\mathrm{E}}]D[\phi]\mathrm{e}^{-I(g_{\mathrm{E}},\phi)}\text{。}\tag{10.2.6}$$

按经典的最小作用量原理，如果 I 恒正，在半经典近似下，式 (10.2.5) 和式 (10.2.6) 可近似写为

$$\varPsi(x,t)\sim N\mathrm{e}^{-I(x)},\tag{10.2.7}$$

$$\varPsi(h_{ij},\phi)\sim\sum_{\mathcal{M}}\mathrm{e}^{-I(g_{\mathrm{E}},\phi)}\text{。}\tag{10.2.8}$$

本章由于大量涉及欧化几何，为方便起见，取号差为 $(-,+,+,+)$。如果积分域是有界的，则

$$S_{\mathrm{g}}=-\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x(R+2\varLambda)-\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}}\mathrm{d}^3xh^{1/2}K\,,\tag{10.2.9}$$

其中，R 项前较式 (5.1.3) 多一负号，源自选用了不同号差的度规。

$$K=\mathrm{Tr}K^i_j,\quad K_{ij}=-\boldsymbol{\nabla}_i n_j,\tag{10.2.10}$$

是 4 维流形的 3 维边界 $\partial\mathcal{M}$ 上的外曲率 (extrinsic curvature) 或第二基本型，它与超曲面 $\partial\mathcal{M}$ 上的内禀曲率 ${}^3R_{ij}$ 不同，后者仅决定于 $\partial\mathcal{M}$ 上的度规 h_{ij}，n_i 确定 ∂M 嵌入 M 的法方向, $h=\det(h_{ij})$ 是 h_{ij} 的行列式 (进一步讨论见 10.3 节)。

注意：在式 (10.2.9) 中出现了一个边界项， 称为吉本斯–霍金项[93]。在由 $-\displaystyle\int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x(R+2\varLambda)$ 通过对 $g_{\mu\nu}$ 的变分求爱因斯坦引力场方程时，如果令 $\partial\mathcal{M}$ 上的度规变分及其偏导数的变分均为零，则不需要任何边界项，由变分原理就可以

得到方程；但如果只要求 $\partial\mathcal{M}$ 上的度规变分为零，而偏导数的变分不为零时，就需要这一项了。事实上，由 $\delta S_g = 0$ 和爱因斯坦方程应得到

$$-\frac{1}{16\pi G}\delta\int_{\mathcal{M}}\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x(R+2\Lambda) = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu})\mathrm{d}V_{\lambda}, \quad (10.2.11)$$

其中，$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ 含有度规变分的偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial x^c}\delta g_{\mu\nu}$, 它一般不为零，因此必须在引力场作用量中引入一个抵消项，吉本斯和霍金证明这个抵消项为

$$\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}}\mathrm{d}^3xh^{\frac{1}{2}}K, \quad (10.2.12)$$

于是，引力场的作用量就写成式 (10.2.9) 的形式。当 ∂M 为类空超曲面时，欧氏化后，有

$$S_{\mathrm{g}} \to -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}}(-\mathrm{i}\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}^3x\sqrt{g_{\mathrm{E}}}(R_{\mathrm{E}}+2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}}\mathrm{d}^3xh^{\frac{1}{2}}(-\mathrm{i}K_{\mathrm{E}}) = \mathrm{i}I_{\mathrm{g}}, \quad (10.2.13)$$

其中，$K_{\mathrm{E}} = \mathrm{i}K$ 或 $K = -\mathrm{i}K_{\mathrm{E}}$,

$$I_{\mathrm{g}} = \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}^3x\sqrt{g_{\mathrm{E}}}(R_{\mathrm{E}}+2\Lambda) + \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}}\mathrm{d}^3xh^{\frac{1}{2}}K_{\mathrm{E}}。 \quad (10.2.14)$$

当超曲面 $\partial\mathcal{M}$ 是类时的，式 (10.2.13) 后一项的 d^3x 应改为 $\mathrm{d}t\mathrm{d}^2x \to -\mathrm{i}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}^2x$, $K_{\mathrm{E}} = K$, 所以仍有式 (10.2.14)。

此外，可以证明，当 $\Lambda = 0$ 时，引力系统的总能量和总熵都由无穷远边界项决定。

路径积分量子化的最大问题在于 I_{g} 的非正定性或 I_{g} 无下界[102](也可参见正作用定理[103, 104])，这意味着当沿实欧氏路径积分时，积分将不收敛。例如，在作共形变换 $\bar{g}_{\mu\nu} = e^{2\sigma(x)}g_{\mu\nu}$ 后，有

$$\bar{R} = \mathrm{e}^{-2\sigma}[R + 6(\Delta_1 + \Delta_2)\sigma],$$

其中，$\Delta_1 = g^{\mu\nu}\sigma_{;\mu}\sigma_{;\nu}$, $\Delta_2 = g^{\mu\nu}\sigma_{;\mu\nu}$(参见式 (7.2.15))，由 $\sigma(x)$ 的任意性知，I_{g} 的正定性不能保持且无下界，因而对实欧氏路径积分是发散的。解决之道可引入复度规的“路径”，这时

$$S_{\mathrm{g}} = S_{\mathrm{g}}^R + \mathrm{i}S_{\mathrm{g}}^I,$$

或

$$-I_{\mathrm{g}} = \mathrm{i}S_{\mathrm{g}} = \mathrm{i}S_{\mathrm{g}}^R - S_{\mathrm{g}}^I = -I_{\mathrm{g}}^{(R)} - S_{\mathrm{g}}^{(I)},$$

故

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_g} = \mathrm{e}^{-[I_{\mathrm{g}}^{(R)} + S_{\mathrm{g}}^{(I)}]}。$$

我们总可以选择适当的度规和复中间几何使 $I_{\mathrm{g}}^{(R)} + S_{\mathrm{g}}^{(I)}$ 有下界且积分是收敛的，显然这种路径是无穷多的。

10.3　正则量子化，惠勒–德维特方程

正则量子化的步骤如下：

(1) 把经典理论改写成哈密顿形式，找出正则共轭量来。

(2) 选择一个类空超曲面，把正则共轭量当作算符，它们在此类空超曲面上满足基本对易 (反对易) 关系 —— 量子化条件。

首先，我们对 4 维时空作 1+3 分解，即在时空流形中引入一个类空超曲面，$X^\mu = X^\mu(t, x^i)$，在其上任一点 (t, x^i) 引入法矢 n^μ 和切矢

$$X_i^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial x^i} = X^\mu_{,i}, \tag{10.3.1}$$

(n^μ, X_i^μ) 构成一个局部 4 标架，它们满足

(1) 正交性：$g_{\mu\nu} X_i^\mu n^\nu = 0$，即法矢与切矢正交；

(2) 类空超曲面上的度规：$h_{ij} = g_{\mu\nu} X_i^\mu X_j^\nu$，即类空超曲面上度规是 4 维时空度规在 3 个切标架上的投影；由于超曲面上的诱导度规与 4- 维流形 M 上的度规有如下关系

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu\,, \tag{10.3.2}$$

所以，$h_{ij} = h_{\mu\nu} X_i^\mu X_j^\nu$。

(3) 类时性：$g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1$，即类空超曲面上的法矢是类时的。

对于类空超曲面，我们约定：i, j 取 1, 2, 3。

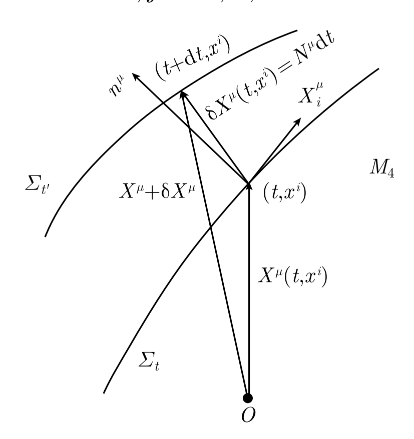


图 10.1　时移与位移

如图 10.1 所示，设超曲面在时空中作连续变形。定义变形矢量 N^μ 为

$$N^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial t} X^\mu(t, x^i) \equiv \dot{X}^\mu\,, \tag{10.3.3}$$

它定义了坐标 t 流逝的方向。把它在局部 4 标架上分解

$$N^\mu = Nn^\mu + N^i X_i^\mu \,, \tag{10.3.4}$$

通常把类时分量 N 称为时移函数 (lapse function) 或简称为时移，把类空分量 N^i 称为位移矢量 (shift vector) 或简称为位移。

现在证明

$$\mathrm{d}s^2 = -(N^2 - N_i N^i)\mathrm{d}t^2 + 2N_i \mathrm{d}x^i \mathrm{d}t + h_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j \,, \tag{10.3.5}$$

其中，$N_i = h_{ij}N^j$。

证

$$\mathrm{d}s^2 = g_{tt}\mathrm{d}t^2 + 2g_{it}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}t + g_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j \,, \tag{10.3.6}$$

考虑如图 10.1 所示的由超曲面的变化给出的时空间隔

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\mathrm{d}X^\mu dX^\nu &= g_{\mu\nu}\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \mathrm{d}t\mathrm{d}t + 2g_{\mu\nu}\dot{X}^\mu X_i^\nu \mathrm{d}t\mathrm{d}x^i + g_{\mu\nu}X_i^\mu X_j^\nu \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j \\ &= g_{tt}\mathrm{d}t\mathrm{d}t + 2g_{it}\mathrm{d}t\mathrm{d}x^i + g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \end{aligned} \tag{10.3.7}$$

所以

$$g_{ij} = X_i^\mu X_j^\nu g_{\mu\nu} = X_i^\mu X_j^\nu (h_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu) = X_i^\mu X_j^\nu h_{\mu\nu} = h_{ij} \,, \tag{10.3.8}$$

$$\begin{aligned} g_{ti} &= N^\mu X_i^\nu g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(Nn^\mu + N^j X_j^\mu)X_i^\nu \\ &= N^j g_{\mu\nu} X_j^\mu X_i^\nu = N^j h_{ji} = N_i \,, \end{aligned} \tag{10.3.9}$$

$$\begin{aligned} g_{tt} &= \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu g_{\mu\nu} = N^\mu N^\nu g_{\mu\nu} = N^\mu N^\nu (h_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu) \\ &= (Nn^\mu + N^i X_i^\mu)(Nn^\nu + N^j X_j^\nu)h_{\mu\nu} - N^2 \\ &= N^i X_i^\mu N^j X_j^\nu h_{\mu\nu} - N^2 \\ &= N^i N_i - N^2 \,。 \end{aligned} \tag{10.3.10}$$

证毕。

利用式 (10.3.2) 和式 (10.3.5) 可以把式 (10.2.9) 的体积分项改写为

$$S_\mathrm{g}(h_{ik}, N, N^i) = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}=R^1\times\Sigma_3} \mathrm{d}^4 x h^{\frac{1}{2}} N[K^2 - K^{ij}K_{ij} + {}^3R(h) + 2\Lambda], \tag{10.3.11}$$

其中

$$K_{ij} = \frac{1}{N}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} + N_{(i|j)}\right], \tag{10.3.12}$$

其中，$N_{(i|j)}$ 是指 N_i 在 3 几何 h_{ij} 上的协变微分并取对称化，${}^3R$ 是由 h_{ij} 所决定的曲率标量。注意：式 (10.2.9) 边界项中的 K 和 h 分别是包括初态与末态的类空

超曲面及接近无穷远处的类时边界上的外曲率的迹和诱导度规的行列式，而不是内部的类空超曲面 Σ_t 上的量。式 (10.3.11) 的证明如下所述。

$$g=(N^iN_i-N^2)h-A^{ij}N_iN_j\,, \tag{10.3.13}$$

其中，A^{ij} 是矩阵 h 第 i 行第 j 列的代数余子式，$A^{ij}=hh^{ij}$，所以

$$g=(N^iN_i-N^2)h-hh^{ij}N_iN_j=-N^2h \tag{10.3.14}$$

或 $\sqrt{-g}=Nh^{\frac{1}{2}}$, 又由微分几何中的高斯 - 科达齐 (Codazzi) 关系可推得

$$R={}^3R-K^{ij}K_{ij}+K^2\,。 \tag{10.3.15}$$

将式 (10.3.14) 和式 (10.3.15) 代入式 (10.2.9) 中即可得到式 (10.3.11)。1995 年，霍金与霍罗威茨 (Horowitz) 指出, 若考虑边界项，并假设接近无穷远处的类时边界与类空超曲面 Σ_t 正交，则式 (10.2.9) 应为[105]

$$\begin{aligned}S_{\rm g}=&-\int N{\rm d}t\left[\frac{1}{16\pi G}\int_{\Sigma_t}\sqrt{h}(K^2-K_{ij}K^{ij}+{}^3R+2\Lambda){\rm d}^3x\right.\\&\left.+\frac{1}{8\pi G}\int_{S_t^\infty}\sigma^{1/2}\,{}^2K{\rm d}^2x\right],\end{aligned} \tag{10.3.16}$$

其中，S_t^∞ 是接近无穷远处的类时边界与类空面 Σ_t 相交得到的 2 维曲面 (图 10.2), σ 和 ${}^2K$ 分别是这个 2 维面上的诱导度规的行列式和外曲率的迹。

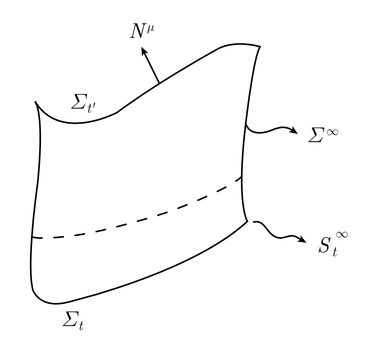


图 10.2　边界项示意图

由式 (10.3.11) 可知，引力拉氏量为

$$\mathscr{L}_{\rm g}=-\frac{1}{16\pi G}\left[K^2-K^{ij}K_{ij}+R^{(3)}+2\Lambda\right], \tag{10.3.17}$$

由于它不是 $\dot N$ 和 $\dot N^i$ 的函数，所以

$$P_N=\frac{\delta S_g}{\delta\dot N}=0\,, \tag{10.3.18}$$

$$P_{N^i}=\frac{\delta S_g}{\delta\dot N^i}=0\,, \tag{10.3.19}$$

这表明，引力系统存在 4 个初级约束，要求这 4 个初级约束在演化中保持不变 (满足欧拉–拉格朗日方程)，导致 4 个次级约束。对于纯引力的情况，这 4 个次级约束是

$$\frac{\delta S_{\rm g}}{\delta N}=-H_{\rm g}=0\,,$$
$$\frac{\delta S_{\rm g}}{\delta N^i}=-H_i^{\rm g}=0\,,$$

它们就是下面要讨论的哈密顿约束与动量约束。

即使是对与物质偶合的系统，哈密顿约束与动量约束也是存在的, 它们可以直接从波泛函的路径积分表达式 (10.1.6) 中得到。由于式 (10.1.6) 所表示的波泛函不含时移 N 和位移 N_i，式 (10.1.6) 分别对 N 和位 N^i 变分可得

$$0=\int D[g]D[\phi]\left(\frac{\delta S}{\delta N}\right)\exp[{\rm i}S(g,\phi)], \tag{10.3.20}$$

$$0=\int D[g]D[\phi]\left(\frac{\delta S}{\delta N^i}\right)\exp[{\rm i}S(g,\phi)]。 \tag{10.3.21}$$

由 g、ϕ 的任意性可得出

$$\frac{\delta S}{\delta N}=-H=0\,, \tag{10.3.22}$$

$$\frac{\delta S}{\delta N^i}=-H_i=0\,。 \tag{10.3.23}$$

式 (10.3.22) 就是哈密顿约束

$$H=-\frac{\delta S}{\delta N}=-\frac{1}{16\pi G}h^{1/2}(K^2-K^{ij}K_{ij}-{}^3R-2\Lambda+16\pi GT_{nn})=0\,, \tag{10.3.24}$$

式 (10.3.23) 就是动量约束

$$H_i=\frac{\delta S}{\delta N^i}=-\frac{1}{8\pi G}h_{ik}\pi^{kj}{}_{|j}+h^{1/2}T^n{}_i=0, \tag{10.3.25}$$

或

$$(h^{-1/2}\pi_i{}^j)_{|j}-8\pi GT^n{}_i=0, \tag{10.3.26}$$

其中

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta S_{\rm m}}{\delta N}\right|_{N^i,h_{ij}}&=2N\left.\frac{\delta S_{\rm m}}{\delta N^2}\right|_{N^i,h_{ij}}\\&=-2N\frac{\delta S_{\rm m}}{\delta g_{tt}}=-h^{1/2}N^2T^{tt}=-h^{1/2}N^2g^{t\mu}g^{t\nu}T_{\mu\nu}\\&=-h^{1/2}N^{-2}(-N^\mu+N^iX_i^\mu)(-N^\nu+N^jX_j^\mu)T_{\mu\nu}\\&=-h^{1/2}T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu=-h^{1/2}T_{nn}\end{aligned} \tag{10.3.27}$$

给出物质场能动张量在超曲面法线方向的投影，即

$$\pi^{ij}=16\pi G\frac{\delta S_{\rm g}}{\delta \dot{h}_{ij}}=h^{1/2}(Kh^{ij}-K^{ij})\text{。} \tag{10.3.28}$$

下面我们来证明式 (10.3.24) 和式 (10.3.25) 两式。只需注意

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial N}(NK_{ij}K^{ij})&=-K_{ij}K^{ij}\,,\\ \frac{\partial}{\partial N}(NK^2)&=-K^2\,,\end{aligned} \tag{10.3.29}$$

即可证明式 (10.3.24)。类似地

$$\begin{aligned}-\frac{\delta S_{\rm g}}{\delta N^i(x)}&=-\frac{1}{16\pi G}\frac{\delta}{\delta N^i}\int Nh^{1/2}{\rm d}t'{\rm d}^3x'(K_{jk}K^{jk}-K^2)\\ &=-\frac{1}{8\pi G}\int Nh^{1/2}{\rm d}t'{\rm d}^3x'(K^{jk}-Kh^{jk})\frac{1}{N}\frac{\delta N_{(j|k)}}{\delta N^i(x)}\\ &=\frac{1}{8\pi G}\int h^{1/2}{\rm d}t'{\rm d}^3x'(K^{jk}-Kh^{jk})_{|(k}h_{j)i}\delta^4(x-x')\\ &=\frac{1}{8\pi G}h^{1/2}(K^{jk}-Kh^{jk})_{|k}h_{ji}\\ &=-\frac{1}{8\pi G}\pi^{jk}{}_{|k}h_{ji}=-\frac{1}{8\pi G}\pi_i^{\;k}{}_{|k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta S_{\rm m}}{\delta N^i}\right|_{N,h_{ij}}&=\left.\frac{\delta S_{\rm m}}{\delta g_{tt}}\frac{\partial g_{tt}}{\partial N^i}\right|_{N,h_{ij}}+2\left.\frac{\delta S_{\rm m}}{\delta g_{tj}}\frac{\partial g_{tj}}{\partial N^i}\right|_{N,h_{ij}}\\ &=Nh^{1/2}(T^{tt}N_i+T^{tj}h_{ji})=Nh^{1/2}(T^{tt}g_{ti}+T^{tj}g_{ji})\\ &=Nh^{1/2}T^t{}_i\,,\end{aligned}$$

另外，

$$\begin{aligned}T^n{}_j&=g_{\mu\nu}n^\mu T^\nu{}_j=g_{\mu\nu}\left(\frac{N^\mu}{N}-\frac{N^k}{N}X_k^\mu\right)T^\nu{}_j\\ &=g_{\mu0}\left(\frac{N^\mu}{N}-\frac{N^k}{N}X_k^\mu\right)T^0{}_j+g_{\mu l}\left(\frac{N^\mu}{N}-\frac{N^k}{N}X_k^\mu\right)T^l{}_j\\ &=N^{-1}g_{00}T^0_j-\frac{N^k}{N}g_{k0}T^0{}_j+N^{-1}g_{0l}T^l{}_j-\frac{N^k}{N}g_{kl}T^l{}_j\\ &=-NT^0{}_j\,,\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\delta S_{\rm m}}{\delta N^i}=-h^{1/2}T^n{}_i\text{。} \tag{10.3.30}$$

由以上讨论易见，在 ADM 形式、量子引力、量子宇宙学等领域，取自然单位制 $16\pi G=\hbar=c=1$ (而不是 $G=\hbar=c=1$)，可使问题更简化。下面，如不特别声明，都是采用这一单位制。

在自然单位制中，由式 (10.3.28) 可把式 (10.3.24) 改写成

$$H=-\pi^{ij}K_{ij}+h^{1/2}(R^3+2\Lambda-T_{nn})=0\,。\tag{10.3.31}$$

引入超度规 (supermetric, 又称为德维特度规)

$$G_{ijkl}=\frac{1}{2}h^{-1/2}(h_{ik}h_{jl}+h_{il}h_{jk}-h_{ij}h_{kl})\,,\tag{10.3.32}$$

可得

$$-\pi_{ij}K^{ij}=G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl}\,,\tag{10.3.33}$$

所以哈密顿约束最后可写为

$$H=G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl}+h^{1/2}(R^3+2\Lambda-T_{nn})=0\,。\tag{10.3.34}$$

进一步, 总作用量对 h_{ij} 变分，即得经典几何动力学中的演化方程。演化方程可以写成正则的形式，正则共轭量为 h_{ij} 和 π^{ij} 及物质场的正则共轭量。在演化中，这些正则共轭量 h_{ij} 和 π^{ij} 并不独立，必须满足两个约束方程 —— 式 (10.3.24) 和式 (10.3.25)。对于 $\mathbb{R}\times\Sigma_3$ 的流形，演化方程和约束方程等价于爱因斯坦方程组，包含了全部经典几何动力学 (geometrodynamics) 的信息。

现引入正则量子化，即把 π^{ij} 看成正则共轭算符，在类空超曲面上满足基本对易关系，即

$$[\hat{h}_{ij}(x),\hat{\pi}^{kl}(x')]=\mathrm{i}\delta_{(ij)}^{\;\;(kl)}\delta^3(x,x')\,,\tag{10.3.35}$$

其中

$$\delta^3(x,x')=h^{-1/2}\delta^3(x-x')\,,$$

则约束方程 (10.3.34) 和约束方程 (10.3.25) 变为泛函微分方程。

令

$$\begin{aligned}\hat{\pi}^{ij}&=-\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta h_{ij}},\\ \hat{\pi}_{\phi}&=-\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\phi},\end{aligned}\tag{10.3.36}$$

由式 (10.3.34) 可得惠勒–德维特方程 (W-D 方程)，即

$$\left\{-G_{ijkl}\frac{\delta^2}{\delta h_{ij}\delta h_{kl}}+h^{1/2}\left[R^{(3)}+2\Lambda-T_{nn}\left(-\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\phi},\phi\right)\right]\right\}\Psi(h_{ij},\phi)=0,\tag{10.3.37}$$

由式 (10.3.26) 可得量子动量约束方程

$$\left[\frac{\delta}{\delta h_{ij}}\Psi(h_{ij},\phi)\right]_{|i} = +\frac{\mathrm{i}}{2}h^{1/2}T^{nj}\left(-\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\phi},\phi\right)\Psi(h_{ij},\phi)\text{。} \tag{10.3.38}$$

现对式 (10.3.37) 和式 (10.3.38) 两组方程做一些讨论。

(1) 在经典几何动力学中, 我们得到经典几何所要满足的两组约束方程。正则量子化后, 得到波泛函所要满足的两组泛函偏微分方程。如果在经典哈密顿约束方程中引入代换 $\pi^{ij}=\dfrac{\delta S}{\delta h_{ij}}$, 并添加一项 $\dfrac{\partial S}{\partial t}$, 则哈密顿约束方程化为哈密顿–雅可比 (Jacobi) 方程 (H-J 方程) 即 $\dfrac{\partial S}{\partial t}+H=0$。由于现在 H、S 不显含时间，故在稳定约束情况下 $\left(\dfrac{\partial S}{\partial t}=0\right)$, 哈密顿约束即 H-J 方程，它的解即经典作用量 S。在半经典近似下，作为 H-J 方程的解的经典作用量 S 决定了波函数。由此可知，量子哈密顿约束方程或 W-D 方程就是量子几何动力学中的基本动力学方程，原则上它们应该适用于任何量子引力系统，关键在于选择适当的边界条件和初值条件。

(2) 泛函偏微分方程 (10.3.37) 可看成由度规场$\{h_{ij}(t,x^i)\}$ 所构成的流形上以 G_{ijkl} 为超度规的 “微分” 方程。可以验算

$$\begin{aligned}
&G_{ijkl}=G_{jikl}, \qquad G_{ijkl}=G_{ijlk}, \qquad G_{ijkl}=G_{klij}\,,\\
&G^{ijkl}=G^{jikl}, \qquad G^{ijkl}=G^{ijlk}, \qquad G^{ijkl}=G^{klij}\,,\\
&G_{ijpq}G^{klpq}=\delta^{(kl)}_{(ij)}\,,
\end{aligned}$$

其中

$$G^{ijkl}=\frac{1}{2}h^{1/2}(h^{ik}h^{jl}+h^{il}h^{jk}-2h^{ij}h^{kl})\text{。} \tag{10.3.39}$$

独立的成对指标是：11、22、33、12、13、23，对角元素为 G_{1111}、G_{2222}、G_{3333}、G_{1212}、G_{1313}、G_{2323}，号差为 $(-+++++)$ (详见文献 [106]), 故度规场在每一时空点上构成一个 6 维空间，称为 6 维度规场空间，W-D 方程就是 6 维度规场空间内的一个双曲方程。“$-$”相当于度规场空间的“时间”部分，“类时”方向的一个方便选取是 $h^{1/2}$ 或三维体积增加的方向, 而理论本身与时间 t 无显示的关系。注意以下差别

4 维时空流形	6 维度规场流形
点(t,x,y,z)	点$\{h_{ij}(t,x^m)\}$
度规$g_{\mu\nu}$	超度规$G^{ijkl}(t,x^m)$

(3) W-D 方程定义于任一空间点，在不同的空间点，$\delta h_{ij}(x)$ 不同，故泛函微分方程 (10.3.37) 的个数是 3 维空间的点数 ∞^3, 应着重指出：3 维类空超曲面上的所

有 3 度规场集合 $\{h_{ij}\}$ 组成度规场空间，称为超空间 (superspace)。超空间内任一“点”含有 6 个“坐标”。当考虑物质场后，超空间将被扩充。宇宙波泛函就是定义在扩充的超空间上的泛函。

W-D 方程是一个在超空间上具有德维特超度规的 6 维二阶泛函双曲方程。由于 h_{ij} 是空间点的函数，在任一空间点存在无限多种不同的 3 度规，故超空间也可以看成 3 空间上的无限维流形，而泛函微分方程 (10.3.37) 是一个 ∞^3 维联立方程。

(4) 式 (10.3.38) 在真空情况下显示了理论的微分同胚不变性。这是由于在真空情况下式 (10.3.38) 化为

$$\left[\frac{\delta}{\delta h_{ij}}\Psi(h_{ij},\phi)\right]_{|i}=0\,。\tag{10.3.40}$$

证　令 $\boldsymbol{\xi}$ 为积分曲线 φ 的切矢，由 ξ^i 所决定的 3 度规的形式变分为 $h_{jk}\to h'_{jk}=h_{jk}+\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}h_{jk}$, 在微分同胚映射下：$\Sigma\xrightarrow{\varphi}\Sigma$,

$$\begin{aligned}\Psi(h_{ij},\phi)\to\Psi(h_{ij},\phi)&+\int\mathrm{d}^3x\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}h_{ij}\frac{\delta\Psi}{\delta h_{ij}}\\&=\Psi(h_{ij},\phi)+\int\mathrm{d}^3x(\xi_{i|j}+\xi_{j|i})\frac{\delta\Psi}{\delta h_{ij}}\,,\end{aligned}\tag{10.3.41}$$

式 (10.3.41) 第二项积分后可得

$$\delta\Psi=-2\int\mathrm{d}^3x\xi_j\left(\frac{\delta\Psi}{\delta h_{ij}}\right)_{|i}\quad(\text{考虑 3 维流形的紧致性}),\tag{10.3.42}$$

动量约束式 (10.3.40) 表明，理论具有 3 维微分同胚不变性，或波泛函 $\Psi(h_{ij})$ 仅与类空超曲面的 3 几何有关, 而与坐标系的选择或度规的选择无关。

(5) 边界条件和初值条件：W-D 方程是一个关于 (h_{ij},ϕ) 的二阶双曲泛函变分方程，需要边界条件和初值条件来定解。后面我们将介绍在宇宙学中两种常用的有意义的定解条件，即哈特–霍金的“无边界” 边界条件[107] 和维兰金 (Vilenkin) 的超空间边界条件[108, 109]。

10.4　小超空间模型

超空间是一个无限维流形，无法求解。如果考虑上述无限维空间内的一个有限维子空间 —— 小超空间，往往可以对 W-D 方程近似求解。

在宇宙学中，最简单的小超空间近似是，设 3 几何的拓扑是 $\mathbb{S}^3$, 因而宇宙的拓扑是 $\mathbb{R}^1\times\mathbb{S}^3$,

$$\mathrm{d}s^2=\sigma^2[-N^2(t)\mathrm{d}t^2+a^2(t)\mathrm{d}\Omega_3^2],\quad\sigma^2\equiv\frac{l_\mathrm{p}^2}{24\pi^2},\tag{10.4.1}$$

其中，$l_{\mathrm{p}}=(16\pi G\hbar c^{-3})^{1/2}$。注意：式 (10.4.1) 中 σ 的量纲为长度，时空坐标已无量纲。

为简单计，设物质场为共形不变标量场，宇宙学原理要求

$$\phi=\phi(t)\,,$$

因其宇宙波函数只是两个自由度 $a(t)$ 和 $\phi(t)$ 的泛函，即

$$\Psi=\Psi(a(t),\phi(t))\,。$$

引入

$$\chi\equiv\sqrt{2}\pi\sigma a\phi \tag{10.4.2}$$

后，经典洛伦兹作用量可以写为

$$S=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\left(\frac{N}{a}\right)\left[-\left(\frac{a\mathrm{d}a}{N\mathrm{d}t}\right)^2+a^2-\lambda a^4+\left(\frac{a\mathrm{d}\chi}{N\mathrm{d}t}\right)^2-\chi^2\right]\,\left(\lambda\equiv\frac{\sigma^2\Lambda}{3}\right)。\tag{10.4.3}$$

证

$$\begin{cases}S=S_{\mathrm{g}}+S_{\mathrm{m}},\\ S_{\mathrm{m}}=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[g^{00}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{1}{6}R\phi^2\right],\\ S_{\mathrm{g}}=-\dfrac{1}{16\pi G}\displaystyle\int \mathrm{d}t\mathrm{d}x^3\sqrt{-g}(R+2\Lambda)\end{cases}\tag{10.4.4}$$

这里

$$-R-2\Lambda=-6\sigma^{-2}a^{-2}(a\ddot{a}N^{-2}-a\dot{a}\dot{N}N^{-3}+\dot{a}^2N^{-2}+1+a^2\lambda),\tag{10.4.5}$$

其中，$\dot{a}\equiv\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$。这是由于

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=\sigma^2[-N^2(t)\mathrm{d}t^2+a^2(t)\mathrm{d}\Omega_3^2]\\&=C^2(\eta)[-\mathrm{d}\eta^2+\mathrm{d}\Omega_3^2]\,,\end{aligned}\tag{10.4.6}$$

其中，$C(\eta)=\sigma a(t)$, $\mathrm{d}\eta=\dfrac{N(t)}{a(t)}\mathrm{d}t$。令 $C'(\eta)\equiv\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\eta}$, $D\equiv\dfrac{C'}{C}$, $a'=\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\eta}=\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\eta}=\dfrac{a}{N}\dot{a}$,

$$\begin{aligned}-R-2\Lambda&=6C^{-2}(D'+D^2+\mathrm{k})-2\Lambda\,, &(10.4.7)\\&=6\sigma^{-2}a^{-2}(a''a^{-1}+1-a^2\lambda)\quad(\mathrm{k}=1)\\&=6\sigma^{-2}a^{-2}(a\ddot{a}N^{-2}-a\dot{a}\dot{N}N^{-3}+\dot{a}^2N^{-2}+1-a^2\lambda),\end{aligned}$$

考虑到

$$\int \sqrt{-g}\mathrm{d}^4 x f(t) = \int \sigma^4 N a^3 \mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega_3 f(t) = 2\pi^2\sigma^4 \int \mathrm{d}t a^3 N f(t) = 2\pi^2\sigma^4 \int \mathrm{d}\eta a^4 f(t)\,, \tag{10.4.8}$$

其中，$f(t)$ 是 t 的任意函数，在 $16\pi G = \hbar = c = 1$ 的单位制下，有

$$S_{\mathrm{g}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t \left(\frac{N}{a}\right)\left[-\frac{a^2}{N^2}\dot{a}^2 + a^2 - \lambda a^4\right], \tag{10.4.9}$$

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{m}} &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4 x\sqrt{-g}\left[-g^{00}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{6}R\phi^2\right] \\ &= \frac{2\pi^2\sigma^2}{2}\int \mathrm{d}t\left[a^3 N^{-1}\dot{\phi}^2 - (a^2\ddot{a}N^{-1} - a^2\dot{a}\dot{N}N^{-2} + a\dot{a}^2 N^{-1} + aN)\phi^2\right] \\ &= \frac{2\pi^2\sigma^2}{2}\int \mathrm{d}t\left[a^3 N^{-1}\dot{\phi}^2 + 2a^2\dot{a}N^{-1}\phi\dot{\phi} + (a\dot{a}^2 N^{-1} - aN)\phi^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\left(aN^{-1}\dot{\chi}^2 - Na^{-1}\chi^2\right), \end{aligned} \tag{10.4.10}$$

式 (10.4.3) 对 N 求变分得哈密顿约束

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta N(t')} &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\left\{\frac{\delta N(t)}{\delta N(t')}\frac{1}{a}\left[\left(\frac{a}{N}\dot{a}\right)^2 - \lambda a^4 + a^2 - (\frac{a}{N}\dot{\chi})^2 - \chi^2\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2a}\left(\frac{a^2}{N^2}\dot{a}^2 - \frac{a^2}{N^2}\dot{\chi}^2 + a^2 - \lambda a^4 - \chi^2\right) = 0\,, \end{aligned} \tag{10.4.11}$$

引入

$$\pi_a = \frac{\delta S}{\delta \dot{a}} = -\frac{a}{N}\dot{a}\,, \tag{10.4.12}$$

$$\pi_\chi = \frac{\delta S}{\delta \dot{\chi}} = \frac{a}{N}\dot{\chi}\,, \tag{10.4.13}$$

式 (10.4.11) 可以写为

$$\pi_a^2 + a^2 - \lambda a^4 - \pi_\chi^2 - \chi^2 = 0\,。 \tag{10.4.14}$$

这就是哈密顿约束。

引入正则量子化

$$\pi_a = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial a}, \quad \pi_\chi = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \chi}\,, \tag{10.4.15}$$

得 W-D 方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} - (a^2 - \lambda a^4 - \chi^2)\right]\Psi(a,\chi) = 0\,。 \tag{10.4.16}$$

引入位形空间度规

$$(G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{10.4.17}$$

位形空间变量

$$\{\gamma^\alpha\} = \{a, \chi\}, \tag{10.4.18}$$

和势函数

$$U(\gamma^\alpha) = (a^2 - \lambda a^4 - \chi^2), \tag{10.4.19}$$

则 W-D 方程化为

$$(\Box - U)\Psi = 0, \tag{10.4.20}$$

方程 (10.4.20) 在形式上与克莱因 - 戈登方程完全一样。

定义

$$J^\alpha \equiv -\frac{\mathrm{i}}{2} G^{\alpha\beta}(\Psi^* \partial_\beta \Psi - \Psi \partial_\beta \Psi^*), \tag{10.4.21}$$

则

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0, \tag{10.4.22}$$

其中，J^α 为位形空间上的守恒流。在小超空间中类空超曲面面元 $\mathrm{d}\Sigma_\alpha$ 上，宇宙出现的几率为

$$\mathrm{d}P = J^\alpha \mathrm{d}\Sigma_\alpha 。 \tag{10.4.23}$$

若对波函数 Ψ 而言，dP 为正，则对 Ψ^* 而言，$\mathrm{d}P$ 为负。波函数的几率不是正定的，或说波函数的内积不是正定的，不能构成一个希尔伯特空间。

这是量子引力理论所遇到的一个严重困难，克服这一困难的一个尝试是引入三次量子化或把宇宙波函数当成算符，其结果是把福克表象引入量子宇宙学中，出现多重宇宙的消灭和产生，导致概念上的不自洽。这一严重困难的根源在于，人们企图统一广义相对论和量子论，在目前的理论框架下，这种统一存在根本概念上的困难。

在把 c 数变为 q 数时，会出现排列上的不确定性。例如，

$$\frac{a^2\dot{a}^2}{N^2} = \frac{a\dot{a}}{N}\frac{a\dot{a}}{N} = \pi_a^2 = \frac{1}{a^p}\frac{a\dot{a}}{N}a^p\frac{a\dot{a}}{N} = \frac{1}{a^p}\pi_a a^p \pi_a \quad (p = 0, 1, \cdots), \tag{10.4.24}$$

故一般有

$$\pi_a^2 = -\frac{1}{a^p}\frac{\partial}{\partial a}\left(a^p \frac{\partial}{\partial a}\right), \tag{10.4.25}$$

其中，p 代表模糊因子。在一般情况下，W-D 方程为

$$\left[\frac{1}{a^p}\frac{\partial}{\partial a}\left(a^p\frac{\partial}{\partial a}\right)-\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}-a^2+\lambda a^4+\chi^2\right]\Psi(a,\chi)=0\text{。}\tag{10.4.26}$$

为了确定模糊因子，霍金和佩奇建议，当采用位形空间的自然度规后，微分算符应恰为位形空间内的达朗贝尔 (d'Alambert) 算符[114] 。然而，这只是一个随意的约定。

完全类似地，对于宇宙常数为零、引力场与物质场最小耦合的情况，定义

$$\varphi=\sqrt{2}\pi\sigma\phi,\tag{10.4.27}$$

作用量可写为

$$S_{\mathrm{g}}=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t\left(\frac{N}{a}\right)\left[-\frac{a^2}{N^2}\dot{a}^2+a^2\right],\tag{10.4.28}$$

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{m}}&=\int\mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g^{00}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2-V(\phi)\right]\\&=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t\left[a^3N^{-1}\dot{\varphi}^2-4\pi^2\sigma^4a^3NV(\phi)\right],\end{aligned}\tag{10.4.29}$$

其中，a 的共轭动量仍由式 (10.4.12) 给出，φ 的共轭动量为

$$\pi_\varphi=\frac{\delta S}{\delta\dot{\varphi}}=\frac{a^3}{N}\dot{\varphi},\tag{10.4.30}$$

哈密顿约束可以写为

$$\pi_a^2+a^2-\frac{1}{a^2}\pi_\varphi^2-4\pi^2\sigma^4a^4V(\phi)=0\text{。}\tag{10.4.31}$$

W-D 方程具有弯曲时空中的克莱因–戈登方程的形式，即

$$\left(\partial_a^2-\frac{1}{a^2}\partial_\varphi^2-U\right)\Psi=0,\quad U=a^2-4\pi^2\sigma^4a^4V(\phi)\text{。}\tag{10.4.32}$$

和前面一样，该 W-D 方程同样存在模糊因子 p 的问题。

10.5　哈特 – 霍金边界条件和维兰金边界条件

欲使宇宙波函数有唯一的特解，应确定路径积分表述或 W-D 方程中的边界 (含初始边界) 条件。讨论最多的两种边界条件是哈特–霍金的“无边界”(no-boundary) 边界条件 (H-H 边界条件)[107] 和维兰金的“隧穿”(tunneling) 边界条件[108, 109]。下面，分别介绍这两种边界条件。

10.5.1　哈特 − 霍金边界条件

如式 (10.2.6) 所示，在路径积分表述中，类空超曲面 B 上的宇宙波函数是

$$\Psi(h_{ij},\phi)|_{\mathrm{B}}=\sum_{\mathcal{M}}\int_C D[g]D[\phi]\exp(-I)\,。\tag{10.2.6}$$

为了定义一个自足的宇宙波函数，哈特–霍金选定如下边界条件：

(1) 积分路径 C 仅由紧致 4 几何组成，它们唯一的共同边界是柯西面 B，如图 10.3 所示；

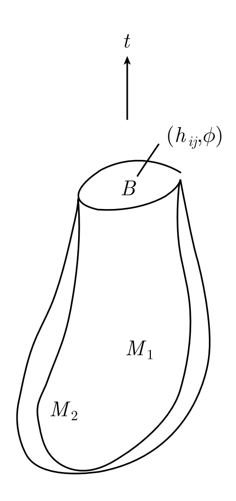


图 10.3　“无边界”边界条件所考虑的几何示意图

(2) 在唯一边界 B 上的 3 几何 h_{ij} 和物质场 ϕ 是给定的，而宇宙的“初态”是没有时空几何、没有物质场的态，称为“无”；

(3) 波泛函及场量的各阶导数应满足正规性条件。

以上就是 H-H 的“无边界”边界条件。霍金说：“…… 比边界条件更合理的是宇宙没有边界”(⋯What could be more reasonable than the boundary condition is that the Universe has no boundary)。

现在由“无边界”边界条件来确定基态宇宙波函数 $\Psi_{\mathrm{H-H}}$。这里首先需要对基态做一说明：严格地来说，宇宙的总能量无定义，因而无法将宇宙的基态定义为宇宙的能量最低态。回顾在原子物理中，氢原子的基态是 S^0 态，它是具有最高对称性的态。仿照原子物理，我们把宇宙的基态定义为具有最高对称性的 4 维闭几何，欧化后，它应是 S^4 几何。

对于欧化后的 S^4 几何，线元为 ((10.4.1) 式，在其中令 $N=1$, 并作威克转动)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s_{\mathrm{E}}^2 &= \sigma^2(\mathrm{d}\tau^2 + a^2\mathrm{d}\varOmega_3^2)\\ &= \left(\frac{\sigma}{H}\right)^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\mathrm{d}\varOmega_3^2)\end{aligned} \tag{10.5.1}$$

其中，$\tau = H^{-1}\vartheta$, $a = H^{-1}\sin\vartheta$, $H \equiv \sqrt{\sigma^2\varLambda/3}$ 是无量纲的哈勃 (Hubble) 常数，$0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$。$\vartheta =$ 常数 是一个 3 维类空超曲面 S^3, (特别地，$\vartheta = \pi/2$ 为 S^4 赤道面截面)。由式 (10.3.12) 知，在 $\vartheta =$ 常数 的类空超曲面上，欧化外曲率为

$$K_{ij}^E = \frac{1}{2\sigma}\frac{\partial h_{ij}}{\partial\tau} = \sigma a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}\delta_{ij} = \frac{\sigma}{H}\sin\vartheta\cos\vartheta, \tag{10.5.2}$$

$$K_{\mathrm{E}} = h^{ij}K_{ij}^E = \frac{3}{\sigma a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau} = \frac{3H}{\sigma}\cot\vartheta。 \tag{10.5.3}$$

引入欧氏化共形时间 $\mathrm{d}\eta = a^{-1}\mathrm{d}\tau$ 后

$$\mathrm{d}s^2 = \sigma^2 a^2(\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\varOmega_3^2) \tag{10.5.4}$$

把式 (10.4.9) 改写成用欧化共形时间表示的欧化作用量，注意到 $\lambda = H^2$, 得

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{g}} &= \frac{1}{2}\int\mathrm{d}\eta\left[-\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 - a^2 + \lambda a^4\right]\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\vartheta\frac{\sin\vartheta}{H^2}(\sin^2\vartheta - 1 - \cos^2\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\\ &= -\frac{1}{3H^2}(1-\cos^3\vartheta)。\end{aligned} \tag{10.5.5}$$

在 10.3 节最后的讨论中，我们看到，扩展超空间的坐标 h_{ij} 和物质场 ϕ 并不具有明显的“类时”“类空”性质, 扩展超空间上的“类时”坐标是 $h^{1/2}$，而“类空”坐标是 $\bar{h}_{ij} \equiv h^{-1/3}h_{ij}$ 和 ϕ。显然，用这样一组坐标来讨论问题，可使问题得到某种程度的化简。进一步，约克曾证明[111]，$h^{1/2}$ 与 $-\dfrac{4}{3}Kl_{\mathrm{p}}^{-2}$ 是一对正则共轭量。于是，我们可以把宇宙波函数从表示空间 $(h^{1/2}, \bar{h}_{ij}, \phi)$ 变到 $(K, \bar{h}_{ij}, \phi)$。

设 I_{g}^K 为 K_{E} 表示中引力场的欧氏作用量。可以证明, 对于形如式 (10.5.1) 的度规，有

$$I_{\mathrm{g}} = I_{\mathrm{g}}^K - \frac{H}{3}\kappa_{\mathrm{E}}a^3, \tag{10.5.6}$$

其中，$\kappa_{\mathrm{E}} \equiv \dfrac{\sigma}{3H}K_{\mathrm{E}} = \cot\vartheta$。

证　只看纯引力的情况。在半经典近似下, 采用 $h^{1/2}$ 和 $\dfrac{4}{3}K_{\mathrm{E}}l_{\mathrm{p}}^{-2}$ 表象宇宙波函数分别为

$$\varPsi(a) \simeq \mathcal{N}\exp(-I_{\mathrm{g}}), \tag{10.5.7}$$

$$\varPhi(K_{\mathrm{E}}) \simeq \mathcal{N}'\exp(-I_{\mathrm{g}}^K), \tag{10.5.8}$$

其中，$\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{N}'$ 代表两个指数前的因子, 给出量子修正及归一化因子。我们在后面的讨论中忽略量子修正，故不去考虑它们的细节。两个表象的波函数由泛函傅里叶变换相联系，即

$$\Psi(a)=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \delta K_{\mathrm{E}}\exp\left(\frac{4}{3}\int h^{1/2}K_{\mathrm{E}}l_{\mathrm{p}}^{-2}\mathrm{d}^3x\right)\Phi(K_{\mathrm{E}})。$$

(详细讨论见式 (10.5.16)~ 式 (10.5.20))。考虑到

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\int h^{1/2}K_{\mathrm{E}}l_{\mathrm{p}}^{-2}\mathrm{d}^3x&=\frac{4}{3}\int(\sigma a)^3K_{\mathrm{E}}l_{\mathrm{p}}^{-2}\mathrm{d}\Omega_3\\&=8\pi^2H\sigma^2a^3\kappa_{\mathrm{E}}l_{\mathrm{p}}^{-2}=\frac{H}{3}a^3\kappa_{\mathrm{E}},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\Psi(a)&=-\frac{\mathcal{N}'}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\delta K_{\mathrm{E}}\exp\left(\frac{H}{3}a^3\kappa_{\mathrm{E}}-I_{\mathrm{g}}^K\right)\\&\simeq-\frac{\mathcal{N}'}{2\pi\mathrm{i}}\exp\left[-I_{\mathrm{g}}^K(K_{\mathrm{E}})+\frac{H}{3}a^3\kappa_{\mathrm{E}}\right],\end{aligned}\tag{10.5.9}$$

比较式 (10.5.9) 与式 (10.5.7) 立即得到式 (10.5.6)。证毕。

由式 (10.5.6) 及式 (10.5.5) 可得

$$I_{\mathrm{g}}^K=\frac{1}{3H^2}\cos\vartheta\sin^2\vartheta+I_{\mathrm{g}}=-\frac{1}{3H^2}\left[1-\frac{\kappa_{\mathrm{E}}}{(\kappa_{\mathrm{E}}^2+1)^{1/2}}\right],\tag{10.5.10}$$

这就是引力场欧氏作用量的 κ 表示。由于

$$\sin\vartheta=\frac{1}{(1+\cot^2\vartheta)^{1/2}}=\frac{1}{(1+\kappa_{\mathrm{E}}^2)^{1/2}}=Ha,\tag{10.5.11}$$

所以

$$\kappa_{\mathrm{E}}=\pm\frac{1}{Ha}\sqrt{1-H^2a^2},\tag{10.5.12}$$

或

$$\kappa_{\mathrm{E}}^2=\frac{1-H^2a^2}{H^2a^2}。\tag{10.5.13}$$

把式 (10.5.12) 代入式 (10.5.6) 中, 并考虑到式 (10.5.10)

$$I_{\mathrm{g}}^K=-\frac{1}{3H^2}[1\mp\sqrt{1-H^2a^2}],\tag{10.5.14}$$

得

$$I_{\mathrm{g}}=-\frac{1}{3H^2}\left[1\mp(1-H^2a^2)^{3/2}\right]\equiv I_{\mathrm{g}}^{(\mp)}。\tag{10.5.15}$$

注意：对于 S^4, 当 $H^2a^2 < 1$ 时，I_g 恒为负。由式 (10.5.15) 所给出的经典解并不唯一，需要进一步论证 $I_{\rm g}^{(-)}$ 和 $I_{\rm g}^{(+)}$ 哪一个对路径积分贡献更大。哈特–霍金 (1983) 论证，应取 $I_{\rm g}^{(-)}$ 值。注意：当 $H^2a^2 < 1$ 时，$I_{\rm g}^{(-)}$、$I_{\rm g}^{(+)}$ 分别对应于 $K_{\rm E} > 0$ 和 $K_{\rm E} < 0$。

哈特–霍金的论证如下。

首先，把波函数从表示空间 $(h^{1/2}, \bar{h}_{ij})$ 变到 $(K, \bar{h}_{ij})$，则有

$$\varPhi(K, \bar{h}_{ij}) = \int_0^\infty \delta h^{1/2} \exp\left(-{\rm i}\frac{4}{3}\int h^{1/2}K{\rm d}^3x\right)\varPsi(h^{1/2}, \bar{h}_{ij}), \tag{10.5.16}$$

$$\varPsi(h^{1/2}, \bar{h}_{ij}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta K \exp\left({\rm i}\frac{4}{3}\int h^{1/2}K{\rm d}^3x\right)\varPhi(K, \bar{h}_{ij})。 \tag{10.5.17}$$

注意到 $h^{1/2} < 0$ 没有物理意义，所以当 $h^{1/2} < 0$ 时，应有 $\varPsi(h^{1/2}, \bar{h}_{ij}) = 0$。于是，由式 (10.5.16) 知，无论 $h^{1/2} > 0$, 还是 $h^{1/2} < 0$, $\varPhi(K, \bar{h}_{ij})$ 在 K 的下半复平面都是解析的。需指出，若 $h^{1/2} < 0$，利用 $\varPhi(K, \bar{h}_{ij})$ 在 K 的下半复平面解析的性质，可在式 (10.5.17) 中增加一个在 K 的下半复平面上无穷大半圆的积分，从而使对 K 的积分路径在实轴与下半复 K 平面内形成一无穷大回路，其积分结果当然为零。这显然是完全自洽的。

其次，对式 (10.5.16) 和式 (10.5.17) 欧氏化，即作变换

$$\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{\nabla n} \to \boldsymbol{\nabla n}_{\rm E} = \boldsymbol{K}_{\rm E} \tag{10.5.18}$$

其中，$\boldsymbol{n}_{\rm E} = -{\rm i}\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{K}_{\rm E} = {\rm i}\boldsymbol{K}$。式 (10.5.16) 和式 (10.5.17) 分别化为

$$\varPhi(K_{\rm E}, \bar{h}_{ij}) = \int_0^\infty \delta h^{1/2} \exp\left(-\frac{4}{3}\int h^{1/2}K_{\rm E}{\rm d}^3x\right)\varPsi(h^{1/2}, \bar{h}_{ij}), \tag{10.5.19}$$

$$\varPsi(h^{1/2},, \bar{h}_{ij}) = \frac{-1}{2\pi{\rm i}}\int_C \delta K_{\rm E} \exp\left(\frac{4}{3}\int h^{1/2}K_{\rm E}{\rm d}^3x\right)\varPhi(K_{\rm E}, \bar{h}_{ij})。 \tag{10.5.20}$$

在欧氏化复 $K_{\rm E}$ 空间中，积分路径 C 应从 $-{\rm i}\infty$ 到 $+{\rm i}\infty$，且 $\varPhi(K_{\rm E}, \bar{h}_{ij})$ 在右半复平面内是解析的。

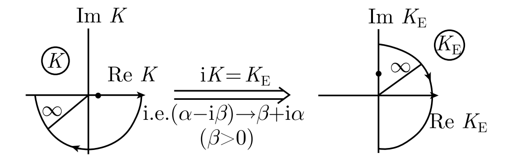


图 10.4　外曲率 K 的解析延拓

再次，由式 (10.5.20) 的最陡下降近似得[①]

$$\Psi \sim \mathrm{e}^{-I_\mathrm{g}} = \mathrm{e}^{-I_\mathrm{g}^K + \frac{H}{3}\kappa_\mathrm{E} a^3}\Big|_{\text{极值}} \simeq \int_C \delta K_\mathrm{E} \exp\left(\frac{H}{3}\kappa_\mathrm{E} a^3 - I_\mathrm{g}^K\right)。\tag{10.5.21}$$

注意到：

(1) $\kappa_\mathrm{E} = \pm\mathrm{i}$ 是指数部分的分支点，也即二根割线的起点。为看出这一点，可令 $\kappa_\mathrm{E} = \mathrm{i} + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则有

$$(\kappa_\mathrm{E}^2+1)^{1/2} = (\kappa_\mathrm{E}+\mathrm{i})^{1/2}(\kappa_\mathrm{E}-\mathrm{i})^{1/2} = (2\mathrm{i}+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{1/2}\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2},$$

由于 $\kappa_\mathrm{E} = \mathrm{i} + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2\pi)}$ 代表同一 κ_E 点，但函数 $(\kappa_\mathrm{E}^2+1)^{1/2}$ 变为负值, 即

$$(\kappa_\mathrm{E}^2+1)^{1/2} = (2\mathrm{i}+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2\pi)})^{1/2}\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2+\mathrm{i}\pi} = -(2\mathrm{i}+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{1/2}\sqrt{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2},$$

故 $(\kappa_\mathrm{E}^2+1)^{1/2}$ 是双叶黎曼面，其支点在 $\kappa_\mathrm{E} = \pm\mathrm{i}$，以这两个支点引入割线，可将它化为两个单值单叶函数。

(2) $\varPhi$ 在右半复 K_E 平面解析，故最陡下降路径 C 应经过使指数 $\left(\frac{H}{3}\kappa_\mathrm{E} a^3 - I_\mathrm{g}^K\right)$ 取极值的 $K_\mathrm{E} > 0$ 的点。$\frac{H}{3}\kappa_\mathrm{E} a^3 - I_\mathrm{g}^K$ 取极值为

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\delta}{\delta\kappa_\mathrm{E}}\left\{\frac{H}{3}\kappa_\mathrm{E} a^3 + \frac{1}{3H^2}\left[1 - \frac{\kappa_\mathrm{E}}{(1+\kappa_\mathrm{E}^2)^{1/2}}\right]\right\} \\ &= \frac{H}{3}a^3 - \frac{1}{3H^2}\frac{1}{(1+\kappa_\mathrm{E}^2)^{1/2}} + \frac{1}{3H^2}\frac{\kappa_\mathrm{E}^2}{(1+\kappa_\mathrm{E}^2)^{3/2}} \\ &= \frac{H}{3}a^3 - \frac{1}{3H^2}\frac{1}{(1+\kappa_\mathrm{E}^2)^{3/2}},\end{aligned}$$

则可得

$$\kappa_\mathrm{E}^2 = \frac{1}{H^2 a^2} - 1。$$

---

① 最陡下降法求线积分

$$f(z) = \int_a^b g(t)\mathrm{e}^{zh(t)}\mathrm{d}t, \quad (z>0, \quad t\text{为复数})$$

如下：由 $\dot{h}(t_0) = 0$ 决定 $h(t)$ 的极值点 t_0, 在复 t 平面内解析移动积分路径，使其

(1) 以 a、b 为端点且过 t_0 点;

(2) 沿积分路径有 $\mathrm{Im}(h(t)) = \mathrm{Im}(h(t_0))$;

(3) 在 t_0 两侧，沿积分路径，$\mathrm{Re}(h(t))$ 都是下降的。

满足上述条件的积分路径称为最陡下降路径 (the steepest decent path)C。可以证明，此时

$$f(z) \approx \mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha z}}g(t_0)\mathrm{e}^{zh(t_0)-\mathrm{i}\theta_0/2}$$

其中，α 和 θ_0 由 $\ddot{h}(t) = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ 定义。详见文献 [44]。

当 $Ha<1$ 时，

$$\kappa_{\mathrm{E}}=\pm\frac{1}{Ha}\sqrt{1-H^2a^2}$$

此即式 (10.5.12)。故最陡路径 C 应是 $\kappa_{\mathrm{E}}=\dfrac{1}{Ha}\sqrt{1-H^2a^2}$ 的直线，如图 10.5 所示。

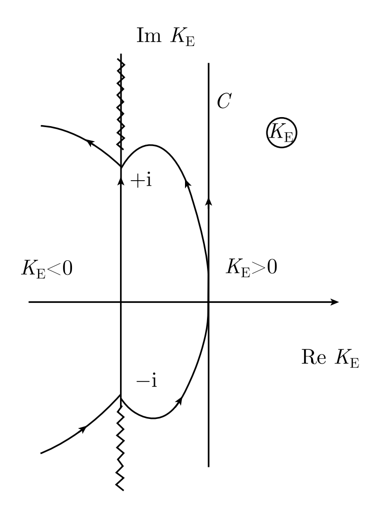


图 10.5　$Ha<1$ 时的最陡下降路径

由此可见，在最陡下降近似下，仅需考虑 $K_{\mathrm{E}}>0$ 处的 $I_{\mathrm{g}}^{(-)}$ 值。

$$\begin{aligned}\Psi\simeq&\mathcal{N}\exp[-I_{\mathrm{g}}^{(-)}]\\=&\mathcal{N}\exp\left\{\frac{1}{3H^2}\left[1-(1-H^2a^2)^{3/2}\right]\right\}\\=&\mathcal{N}\exp\left[\frac{1}{3H^2}-\frac{1}{3H^2}(1-H^2a^2)^{3/2}\right],\end{aligned}\tag{10.5.22}$$

所以

$$\Psi(a)\xlongequal{Ha\ll1}\mathcal{N}\exp\left(\frac{1}{2}a^2\right)。\tag{10.5.23}$$

注意：

$$\sin\vartheta=Ha=\frac{a}{H^{-1}}=\frac{[3\text{ 球半径}]}{[4\text{ 球半径}]}。\tag{10.5.24}$$

$Ha<1$ 意味着 [3 球半径]<[4 球半径]，此时几何是一个 4 球面，如图 10.6 所示。这表示宇宙处于欧几里得演化区。式 (10.5.23) 表示，在宇宙的欧几里得演化区，随

着 a 的增大，宇宙波函数按 a^2 的指数增大。特别是在式 (10.5.23) 中，当 $a=0$ 时，$\Psi(a=0)$ 是一个不为零的有限值，满足波函数的正规条件，因此在经典宇宙学的奇点处，量子宇宙学却是正规的。波函数的指数解相当于经典禁区的欧几里得演化。

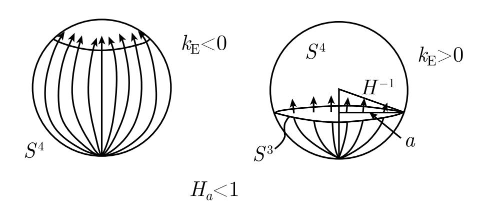


图 10.6　$Ha<1$ 时的几何

当 $Ha>1$，即 [3 球半径]>[4 球半径]，对应于德西特几何。这表示宇宙处于洛伦兹演化区，且处于暴涨相。这时，I_{g} 的极值点为复共轭数，即

$$\kappa_{\mathrm{E}}=\pm\mathrm{i}\frac{1}{Ha}(H^2a^2-1)^{1/2}, \tag{10.5.25}$$

积分路径应是通过虚轴上的两个复共轭点的最陡下降路径，如图 10.7 所示。在最陡下降近似下，应同时考虑两个复共轭点 K_{E} 与 K_{E}^* 处的 I_{g}^K 值, 故

$$\begin{aligned}\Psi\simeq&\mathcal{N}\left[\mathrm{e}^{-I_{\mathrm{g}}(K_{\mathrm{E}})}+\mathrm{e}^{-I_{\mathrm{g}}(K_{\mathrm{E}}^*)}\right]\\=&\mathcal{N}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{3H^2}(H^2a^2-1)^{3/2}}+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3H^2}(H^2a^2-1)^{3/2}}\right]\\=&2\mathcal{N}\cos\left[\frac{1}{3H^2}(H^2a^2-1)^{3/2}\right],\end{aligned} \tag{10.5.26}$$

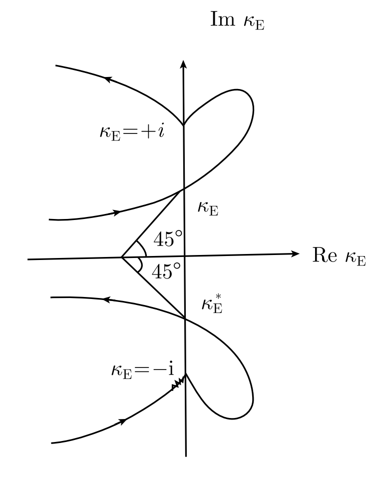


图 10.7　$Ha>1$ 时的最陡下降路径

在其中的第二个等式中，我们已把 $\mathrm{e}^{-1/(3H^2)}$ 因子吸收到 $\mathcal{N}$ 中。这是一个实周期函数的振荡解，相应于经典允许区的洛伦兹演化。直接求解相应的 W-D 方程 (10.4.26)，分离变量后可求得如图 10.8 所示的数值解。

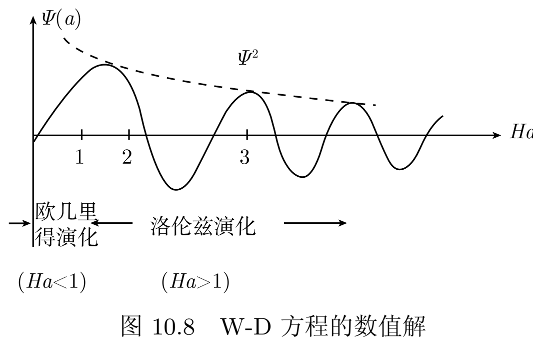


图 10.8 W-D 方程的数值解

包迹线表示不同 3- 球出现的几率

考虑标量场 ϕ，在最小耦合情况下，

$$S=\int\left[-\frac{1}{16\pi G}R-\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-V(\phi)\right]\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\,, \tag{10.5.27}$$

其中，势函数为

$$V(\phi)=\frac{1}{2}m^2\phi^2+\frac{1}{4}\lambda\phi^4\,。 \tag{10.5.28}$$

注意：这里的 λ 是 ϕ 场的自相互作用耦合常数，它不同于前面的重新标度的宇宙常数。欧氏化后，得到欧化作用量

$$I=\int\sqrt{g_{\mathrm{E}}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{16\pi G}R_{\mathrm{E}}+\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+V(\phi)\right]。 \tag{10.5.29}$$

利用欧化爱因斯坦方程得

$$R_{\mathrm{E}}=-8\pi G[(\partial_\mu\phi)^2+4V(\phi)] \tag{10.5.30}$$

或

$$I=-\int\sqrt{g_{\mathrm{E}}}\mathrm{d}^4xV(\phi),\quad \mathscr{L}_{\mathrm{E}}=-V(\phi)\,。 \tag{10.5.31}$$

若在所考虑空间内 $\phi\approx\phi_0=$ 常数，则 $\mathscr{L}_{\mathrm{E}}\approx-V(\phi_0)=$ 常数与带宇宙常数的纯引力欧化拉氏量 $\mathscr{L}_{\mathrm{E}}=\dfrac{1}{16\pi G}(R+2\Lambda)=-\dfrac{\Lambda}{8\pi G}$ 的形式相同，$8\pi GV(\phi_0)$ 起着宇宙常数的作用，此时无量纲的哈勃常数为

$$H^2=\frac{8\pi G\sigma^2}{3}V(\phi_0)=4\pi^2\sigma^4V(\phi_0)\equiv\tilde{V}(\phi_0)\,。 \tag{10.5.32}$$

当 $a^2\tilde{V}(\phi)<1$ 时，

$$\Psi_{\mathrm{H-H}}\sim\exp\left(\frac{1}{3\tilde{V}(\phi)}\left\{1-\left[1-a^2\tilde{V}(\phi)\right]^{3/2}\right\}\right)\simeq \mathrm{e}^{a^2/2}, \tag{10.5.33}$$

这是在经典禁区的欧几里得演化的波函数。

当 $a^2\tilde{V}(\phi)>1$ 时，

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathrm{H-H}}&\sim\exp\left[\frac{1}{3\tilde{V}(\phi)}\right]\cos\left\{\frac{1}{3\tilde{V}(\phi)}[a^2\tilde{V}(\phi)-1]^{3/2}-\frac{\pi}{4}\right\}\\&=\exp\left(\frac{1}{3\tilde{V}(\phi)}\right)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}I}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}I}),\end{aligned} \tag{10.5.34}$$

其中

$$I=\frac{1}{3\tilde{V}(\phi)}[a^2\tilde{V}(\phi)-1]^{3/2}-\frac{\pi}{4}, \tag{10.5.35}$$

它给出在经典允许区的一种洛伦兹演化。

由此可见，H-H 量子宇宙学给出了宇宙由“无”创生，经过欧几里得演化最后进入经典允许区的洛伦兹演化的图像。

我们知道，满足欧化的爱因斯坦方程的解是引力瞬子解，而瞬子解对应于经典禁区，它给出由它连接的两个经典允许区域之间的量子跃迁的几率幅。注意到，在 H-H 宇宙波函数所对应的构形中，引力瞬子解的一端是经典允许区，而另一端是“无”，这个“无”是指即无时空又无物质，因而 H-H 宇宙波函数给出了宇宙从“无”创生的几率幅。

10.5.2　维兰金边界条件

在形如式 (10.5.27) 的、标量场与引力场最小耦合的宇宙模型，W-D 方程由式 (10.4.32) 给出，考虑到模糊因子，可将其改写为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}+\frac{p}{a}\frac{\partial}{\partial a}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-U(a,\varphi)\right]\Psi(a,\varphi)=0, \tag{10.5.36}$$

其中

$$\begin{cases}\varphi^2\equiv 2\pi^2\sigma^2\phi^2\\ U(a,\varphi)=a^2[1-4\pi^2\sigma^4a^2V(\phi)]=a^2[1-a^2\tilde{V}(\varphi)]。\end{cases} \tag{10.5.37}$$

取 $p=1$, 引入 $\alpha\equiv\ln a$, 式 (10.5.36) 化为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\mathrm{e}^{2\alpha}U(a,\varphi)\right]\Psi(a,\varphi)=0\,。 \tag{10.5.38}$$

其中，a、α 的变化范围为：$0 < a < \infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$; φ 的变化范围为 $-\infty < \varphi < +\infty$。在位形空间 (α, φ) 中，α 是类时变量，φ 为类空变量，它们构成一个 2 维闵可夫斯基空间，故可作如图 10.9 所示的彭罗斯图。

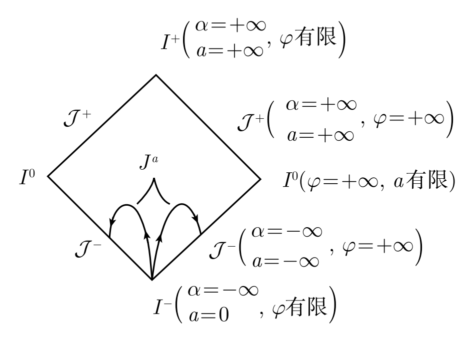


图 10.9　小超空间的彭罗斯图

维兰金将位形空间的边界分为两类，一类是奇异边界，另一类是非奇异边界。在奇异边界上，a 和 φ 中至少有一个发散; 而在非奇异边界, a 与 φ 均不发散。唯一的非奇异边界只能是 I^-，而 $\mathcal{J}^\pm$、I^0、I^+ 都是奇异边界。

定义位形空间的几率流为

$$\boldsymbol{J} = \frac{\mathrm{i}}{2}(\Psi^*\boldsymbol{\nabla}\Psi - \Psi\boldsymbol{\nabla}\Psi^*)\,。\tag{10.5.39}$$

由 WKB 近似可得

$$\Psi \sim \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}S}\,,\tag{10.5.40}$$

故

$$\boldsymbol{J} \sim \mp\boldsymbol{\nabla}S\,,\tag{10.5.41}$$

其中，半经典轨道的 S 是 (参见式 (10.5.33))

$$S = \mathrm{i}I = -\frac{\mathrm{i}}{3\tilde{V}}[1-(1-a^2\tilde{V})^{3/2}]\,。\tag{10.5.42}$$

在边界 I^- 和 $\mathcal{J}^-$ 上，$(a \to 0)$

$$\begin{aligned}&J^{(a)} \sim \mp\frac{\partial S}{\partial\alpha} = \mp a\frac{\partial S}{\partial a}\,, \qquad (p=1)\\ &J^{(\phi)} \sim 0\,,\end{aligned}\tag{10.5.43}$$

考虑到 $\dfrac{\partial S}{\partial a} = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{a}} \sim a\dot{a}$ (因为$L \sim (1-\dot{a}^2)a$)，故

$$J^{(a)} \sim \pm a^2\dot{a}\,,\tag{10.5.44}$$

其中,“+”号相应于 $(+\mathrm{i}S)$, “−”号相应于 $(-\mathrm{i}S)$。现规定，$J^{(a)}>0$ 为位形空间的出射流，$J^{(a)}<0$ 为位形空间的入射流。

维兰金边界条件的表述为：在位形空间的奇异边界处，几率流应为出射流；在位形空间的非奇异边界处，几率流应为入射流。例如，在 $\mathscr{J}^-$ 处，$J^{(a)}=\pm a^2\dot{a}>0$, 但在此处 $\dot{a}<0$，故应选“−”号，或 $\varPsi\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}S}$；在 I^- 处 $\dot{a}>0$, $J^{(a)}<0$ 为入射流，同样应选“−”。

于是，我们得到如下结果。

当 $a^2\tilde{V}<1$ 时，

$$
\begin{aligned}
\varPsi_V(a,\varphi)&\sim\exp(-\mathrm{i}S)\sim\exp\left(-\frac{1}{3\tilde{V}(\varphi)}\left\{1-[1-a^2\tilde{V}(\varphi)]^{3/2}\right\}\right)\\
&\sim\exp\left\{-\frac{1}{3\tilde{V}(\varphi)}\left[1-\left(1-\frac{3}{2}a^2\tilde{V}\right)\right]\right\}=\mathrm{e}^{-a^2/2},
\end{aligned}
\tag{10.5.45}
$$

这是指数衰减函数, 相应于欧几里得区的隧道效应。

当 $a^2\tilde{V}>1$ 时，

$$
\varPsi_V(a,\varphi)\sim\exp\left[-\frac{1}{3\tilde{V}(\varphi)}\right]\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{3\tilde{V}(\varphi)}\left[a^2\tilde{V}(\phi)-1\right]^{3/2}\right\},\tag{10.5.46}
$$

这是振荡函数, 相应于洛伦兹区。

由此可见，维兰金量子宇宙学也给出了宇宙由“无”创生，经过量子隧道效应而进入经典区的洛伦兹演化的图像。

10.5.3　两种宇宙波函数的比较

现在对哈特–霍金的“无边界” 边界条件和维兰金的隧道边界条件作一些比较。

1. 波函数的形式比较

由哈特–霍金的“无边界” 边界条件得出，宇宙从无创生之“初”的宇宙波函数为 $\varPsi\sim\mathrm{e}^{a^2/2}$，即在经典禁区波函数随 a 的增大作指数增长，在普朗克尺度附近演化转入经典洛伦兹演化。由维兰金的隧道边界条件得出，宇宙从无创生之“初”的宇宙波函数为 $\varPsi\sim\mathrm{e}^{-a^2/2}$，即在经典禁区波函数随 a 的增大作指数衰减。这在形式上更符合宇宙经历一个经典禁区的隧道效应达到经典允许区，并开始洛伦兹演化的宇宙创生于无的图象。

2. 宇宙波函数的 $\varTheta=CPT$ 不变问题

设任一标量函数在 C、P、T 变换下分别为

$$\begin{aligned} C\psi(\boldsymbol{x},t) &= \psi^*(\boldsymbol{x},t), \\ P\psi(\boldsymbol{x},t) &= \xi\psi(-\boldsymbol{x},t), \\ T\psi(\boldsymbol{x},t) &= \psi(\boldsymbol{x},-t), \end{aligned} \tag{10.5.47}$$

其中，$\xi = \pm$, 则在 $\varTheta = CPT$ 变换下有

$$\varTheta\psi(\boldsymbol{x},t) = \xi\psi^*(-\boldsymbol{x},-t)\,。 \tag{10.5.48}$$

由于任何宇宙波函数 $\varPsi(h^{1/2},\bar{h}_{ij},\phi)$ 都不显含时间 t ，故有

$$T\varPsi(h^{1/2},\bar{h}_{ij},\phi) = \varPsi(h^{1/2},\bar{h}_{ij},\phi)\,, \tag{10.5.49}$$

这意味着，同一个宇宙波函数既可以描述宇宙的膨胀相，也可以描述宇宙的收缩相。在小超空间近似下，三维类空超曲面是均匀各向同性，因而有

$$P\varPsi(h^{1/2},\bar{h}_{ij},\phi) = \varPsi(h^{1/2},\bar{h}_{ij},\phi)\,。 \tag{10.5.50}$$

这一结果对所有小超空间近似的宇宙波函数都成立。最后，对于由无创生的宇宙，一切荷都为 0，所以对于这样的宇宙波函数应是实的。于是有

$$C\varPsi(h^{1/2},\bar{h}_{ij},\phi) = \varPsi(h^{1/2},\bar{h}_{ij},\phi)\,。 \tag{10.5.51}$$

所以，哈特–霍金宇宙波函数和维兰金宇宙波函数都在 $\varTheta = CPT$ 变换下保持不变，即

$$\varTheta\varPsi_{\mathrm{H-H}} = \varPsi_{\mathrm{H-H}}, \quad \varTheta\varPsi_{\mathrm{V}} = \varPsi_{\mathrm{V}}\,。 \tag{10.5.52}$$

3. 充分暴涨问题

为了在广义相对论框架内解决视界问题、平直性问题和磁单极问题，需在宇宙的极早期引入一个指数膨胀阶段，称为暴涨阶段。

首先我们指出，在经典的爱因斯坦宇宙学中，存在原初暴涨是一个相当一般的结果。

引入 $\alpha = \ln a$ 后，考虑相当一般的、含最小耦合标量场 ϕ 的爱因斯坦作用量 (见式 (10.4.27)∼ 式 (10.4.29)、式 (10.5.27)) 为

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}tN\mathrm{e}^{3\alpha}\left[-\frac{\dot{\alpha}^2}{N^2} + \frac{\dot{\varphi}^2}{N^2} - 2\tilde{V}(\varphi) + \mathrm{e}^{-2\alpha}\right]。 \tag{10.5.53}$$

由 $\left.\dfrac{\delta S}{\delta N}\right|_{N=1} = 0$ 得

$$-\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\tilde{V}(\varphi) = \mathrm{e}^{-2\alpha}\,, \tag{10.5.54}$$

由 $\left.\frac{\delta S}{\delta \alpha}\right|_{N=1}=0$ 及式 (10.5.54) 得

$$\ddot{\alpha}=-2\dot{\varphi}^2-\dot{\alpha}^2+2\tilde{V}(\varphi)\,, \tag{10.5.55}$$

由 $\left.\frac{\delta S}{\delta \phi}\right|_{N=1}=0$ 得

$$\ddot{\varphi}=-3\dot{\alpha}\dot{\varphi}-\tilde{V}'(\varphi)\,。 \tag{10.5.56}$$

式 (10.5.54) 可改写为

$$-\frac{1}{a^2}\dot{a}^2+\dot{\varphi}^2+2\tilde{V}(\varphi)=\frac{1}{a^2}\,。 \tag{10.5.57}$$

显然，当 $a\to 0$ 时, 若 $\dot{\varphi}^2+2\tilde{V}(\varphi)$ 有限，则有

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2\to -1\,, \tag{10.5.58}$$

这是经典禁区，引入欧氏时间 $\tau=\mathrm{i}t$, 则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}\right|_{a\to 0}\to \pm 1\,。 \tag{10.5.59}$$

当 $a^2\tilde{V}=1^+$(经典允许区刚刚出现) 时，由式 (10.5.57) 知，

$$-\frac{1}{a^2}\dot{a}^2+\dot{\varphi}^2+\tilde{V}(\varphi)=0\,, \tag{10.5.60}$$

另外，由式 (10.5.56) 知

$$\ddot{\varphi}=-3\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}-\tilde{V}'(\varphi)\,, \tag{10.5.61}$$

在经典允许区刚刚出现时，a 非常小，所以由式 (10.5.61) 知

$$\dot{\varphi}\approx 0\,, \tag{10.5.62}$$

把式 (10.5.62) 带入式 (10.5.60) 得

$$(\dot{\alpha})^2=\tilde{V}(\varphi)\,, \tag{10.5.63}$$

其解为

$$a(t)\propto \mathrm{e}^{\tilde{V}_0^{1/2}t}\,, \tag{10.5.64}$$

其中，$\tilde{V}_0=\tilde{V}(\varphi_0)$ 是 a 很小时 φ 场的势。这正是原初暴涨。

在随机混沌暴涨模型 (如 $V=\dfrac{1}{2}m^2\phi^2$) 中，充分暴涨条件要求, 经暴涨及其后的膨胀, 目前宇宙泡的半径不得小于可观测宇宙的半径 10^{28} cm $\sim$ e^{65} cm (这里用到了 $\mathrm{e}^x=10^{0.43x}$)，故

$$\mathrm{e}^{\tilde{V}_0^{1/2}(t_f-t_i)}\geqslant\frac{\mathrm{e}^{65}}{\sigma a_i}\frac{a_f}{a_0}\,,\tag{10.5.65}$$

其中, t_i,t_f,a_i,a_f 分别是暴涨开始和暴涨结束的时刻及相应时刻的尺度因子, a_0 是现在的尺度因子, a_0/a_f 是由标准大爆炸宇宙模型给出的宇宙膨胀倍数. 所以, $\tilde{V}_0^{1/2}(t_f-t_i)=2\pi\sigma^2\left(\dfrac{1}{2}m^2\phi_0^2\right)^{1/2}(t_f-t_i)=m|\varphi_0|\sigma(t_f-t_i)>65-\ln(\sigma a_i)-\ln(a_0/a_f)$, 由此可得

$$|\varphi_0|\geqslant\varphi_{\mathrm{suff}}\equiv\frac{142-\ln a_i-\ln(a_0/a_f)}{(m/M_{\mathrm{p}})(t_f-t_i)}\tag{10.5.66}$$

可合理地要求极早期 ϕ 场的动能和势能随机值不得大于普朗克能量 $M_{\mathrm{p}}c^2$, 即

$$\tilde{V}_0\leqslant 1\quad 或\quad |\phi_0|\leqslant\phi_{\mathrm{p}},\tag{10.5.67}$$

而足够热化又要求有足够的真空能 V_0，使得在热化后将宇宙加热到大统一的温度，这就要求

$$V_0\geqslant V_{\min}\qquad 或\qquad |\phi_0|\geqslant\phi_{\min}\,。\tag{10.5.68}$$

由式 (10.5.64)、式 (10.5.67) 及式 (10.5.68) 得

$$\phi_{\min}<\phi_{\mathrm{suff}}<|\phi_0|<\phi_{\mathrm{p}}。\tag{10.5.69}$$

在位形空间 (a,ϕ) 作类空超曲面 $a=$ 常数，则

$$\mathrm{d}P=J\cdot\mathrm{d}\varSigma\simeq\exp\left[\mp\frac{2}{3\tilde{V}(\varphi)}\right]\mathrm{d}\varphi\,,\tag{10.5.70}$$

此处 $J_{(a)}=\mathrm{e}^{\mp 2/3\tilde{V}(\varphi)}$ 为振荡函数的振幅平方，其中“+”、“−”号分别对应于 $\varPsi_{\mathrm{H-H}}$ 和 $\varPsi_{\mathrm{V}}$。哈里威尔 (Halliwell) 定义充分暴涨几率为

$$P\equiv\frac{\displaystyle\int_{\phi_{\mathrm{suff}}}^{\varphi_{\mathrm{p}}}\mathrm{d}\varphi\exp\left[\pm\frac{2}{3\tilde{V}(\varphi)}\right]}{\displaystyle\int_{\phi_{\min}}^{\varphi_{\mathrm{p}}}\mathrm{d}\varphi\exp\left[\pm\frac{2}{3\tilde{V}(\varphi)}\right]}。\tag{10.5.71}$$

对 $\varPsi_{\mathrm{H-H}}$ 取“+”号，此时两个积分的主要贡献来自 ϕ_{suff} 和 $\phi_{\min}$ 的邻域，故

$$P\leqslant 1\,。$$

对 $\varPsi_{\mathrm{V}}$，取“−”号，此时两个积分的主要贡献来自 ϕ_{p} 的邻域，故

$$P\sim 1\,。$$

可见，维兰金量子宇宙学可预言充分暴涨，而哈特–霍金量子宇宙学不具有充分暴涨。

10.6　量子宇宙学与观测宇宙学

观测宇宙学的结果要求量子宇宙学应能解决宇宙的平直性问题、各向同性问题、涨落问题和维数问题等。

10.6.1　平直性问题

佩奇曾证明[113, 114], 至少在弗里德曼–罗伯逊–沃克–标量耦合的小超空间近似中，密度参量

$$\Omega \equiv \frac{\rho_0}{\rho_\mathrm{c}},$$

的几率分布 P 对于 $\psi_\text{H-H}$ 为

$$P \sim \Omega^{-1/2} \left|\Omega - 1\right|^{-1}, \tag{10.6.1}$$

其中，$\rho_\mathrm{c} \equiv \dfrac{3H_0^2}{8\pi G} \sim 10^{-30}\ \mathrm{g/cm^3}$。因此，至少 H-H 量子宇宙学可解决宇宙的平直性问题。

10.6.2　各向同性问题

霍金和鲁特瑞尔 (Luttrell)[115] 以及阿姆斯特丹斯基 Amsterdamski[116] 指出，小超空间近似下，在均匀宇宙中，空间各向同性的几率最大。

为了讨论空间各向异性问题，应把 FRW- 标量耦合的小超空间近似推广到各向异性情况。最简单的推广是比安其 (Bianchi)IX 宇宙，此时度规为

$$\mathrm{d}s^2 = \sigma^2(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{e}^{2\alpha(t)}[\mathrm{e}^{2\beta}]_{ij}\omega^i\omega^j), \tag{10.6.2}$$

其中，$\beta_{ij}(t)$ 是 3×3 无迹的对称矩阵，ω^i 是 3- 球上的三个 1- 形式，$\mathrm{d}\omega^i = \epsilon^i{}_{jk}\omega^j \wedge \omega^k$。不失普遍性，可令 β 矩阵对角化，并选取参数 $\beta_\pm$ 如下

$$(\beta_{ij}) = \mathrm{diag}(\beta_+ + 3^{1/2}\beta_-, \beta_+ - 3^{1/2}\beta_-, -2\beta_+)。 \tag{10.6.3}$$

小超空间坐标为 $(\alpha, \beta_+, \beta_-, \varphi)$, W-D 方程为

$$\left(\mathrm{e}^{-p\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathrm{e}^{p\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta_+^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta_-^2} + M^2\right)\Psi = 0, \tag{10.6.4}$$

其中，$M^2 \equiv \mathrm{e}^{4\alpha}V(\beta_+, \beta_-) + \mathrm{e}^{6\alpha}\sigma^2m^2\varphi^2$, m 是标量场的质量。在小超空间非奇异边界上，$M^2 = 0$, $\sigma^2m^2\varphi^2$ 项相当于无量纲化的宇宙因子项，当 e^α 指数增长时，$(\beta_\pm, \varphi)$ 保持恒定。此时，标量场无量纲化的能量密度 $\rho_\mathrm{m} \equiv \left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \sigma^2m^2\varphi^2$ 保持不变，

而“各向异性能量密度” $\rho_\beta \equiv \left(\dfrac{\mathrm{d}\beta_+}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}\beta_-}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \mathrm{e}^{-2\alpha}\left(V+\dfrac{3}{2}\right)$ 以 $\mathrm{e}^{-2\alpha}$ 速率而减小。在指数膨胀结束时，e^{α} 增加因子 $\exp\left(\dfrac{9}{2}\varphi_0^2\right)$, 其中 φ_0 即 φ 的初始值，故 $\rho_\beta \sim \exp(-9\varphi_0^2)\rho_{\mathrm{m}}$，只要 e^{α} 增大 $10^{32}(m/M_{\mathrm{p}})^{1/2}$ 倍，即可使

$$\rho_\beta/\rho_{\mathrm{m}} < 10^{-66}。$$

这就保证了目前值小于观测值的上限 10^{-11}。

10.6.3　涨落问题

哈里威尔和霍金考虑了 FRW- 标量耦合的小超空间近似中偏离均匀各向同性的涨落问题，得到一个近似标度无关的且符合观测值的密度涨落谱[117]，他们假设微扰 FRW 度规为

$$\mathrm{d}s^2 = \sigma^2[-(N^2 - N_iN^i)\mathrm{d}t^2 + 2N_i\mathrm{d}x^i\mathrm{d}t + a^2(\Omega_{ij}+\epsilon_{ij})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j] \tag{10.6.5}$$

其中，Ω_{ij} 是单位 3- 球上的度规，ϵ_{ij} 是上述度规的微扰，可用 3- 球上的各级调和函数来展开。类似地，N、N_i、ϕ 也可作类似的展开。于是，我们可得到作用量的展开，即

$$S = S_0(a, N_0, \phi) + \sum_n S_n\,, \tag{10.6.6}$$

其中，S_0 是未微扰的作用量，$S_n = \int \mathrm{d}t(L_{\mathrm{g}}^n + L_{\mathrm{m}}^n)$ 是仅考虑二阶小量的微扰作用量，n 是调和函数的主量子数。由此得总哈密顿量为

$$\mathcal{H} = \int NH\mathrm{d}^3x + \int N^iH_i\mathrm{d}^3x \equiv \mathcal{H}_| + \mathcal{H}_-\ 。\tag{10.6.7}$$

10.3 节已指出, 式 (10.6.7) 的第二项是抹匀后的 3 维微分同胚约束算子，它要求波函数在 3 维微分同胚变换下不变，第一项定义 W-D 方程。此时的 W-D 方程可写为

$$\left[H_0 + \sum_n ({}^SH_2^n + {}^VH_2^n + {}^TH_2^n)\right]\Psi = 0\,, \tag{10.6.8}$$

其中，右下角标表示阶数，0 代表未微扰的量，2 代表二阶微扰量，左上角标 S、V、T 分别表示标量微扰、矢量微扰和张量微扰。

把波泛函作类似分解

$$\Psi = \Psi_0 \prod_n \Psi^{(n)}, \tag{10.6.9}$$

其中，$\Psi^{(n)} = {}^S\Psi^{(n)}\,{}^V\Psi^{(n)}\,{}^T\Psi^{(n)}$。在 WKB 近似下，标量模式、矢量模式和张量模式的波泛函分别满足由 ${}^SH_2^n$、${}^VH_2^n$ 和 ${}^TH_2^n$ 所决定的薛定谔方程，即

$$\mathrm{i}\frac{\partial \Psi^{(n)}}{\partial t} = H_2^n \Psi^{(n)}。 \tag{10.6.10}$$

适当选取规范后，可略去 ${}^V\Psi^{(n)}$, 由薛定谔方程可分别求出微扰波泛函随时间的演化。

计算表明：对微波背景辐射温度 T 的各向异性值 ΔT, 主要由标量模式系数 α_n 决定，即

$$\left\langle \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 \right\rangle \sim \langle \alpha_n^2 \rangle。 \tag{10.6.11}$$

由标量微扰波泛函的解及观测值 $\left(\dfrac{\Delta T}{T}\right) \leqslant 10^{-4}$, 可得出标量场质量的上限为 10^{14} GeV。

10.6.4 时间箭头问题

通常有三种不同的时间箭头，它们是：

(1) 热力学时间箭头。时间的方向即熵增长的方向。

(2) 心理学时间箭头。我们可以记忆过去事件，但不能记忆未来。从几率观点看，过去事件的几率为 1，未来事件几率小于 1，这就出现了心理学上的时间箭头。如果可以预知未来，则未来事件的几率也为 1，这就不存在心理学上的时间箭头了。

(3) 宇宙学上的时间箭头。宇宙膨胀或 $a(t)$、$h^{1/2}$ 增长的方向。

人是一个遵从热力学第二定律的系统，因此热力学时间箭头应与心理学时间箭头相同。

哈特、霍金的“无边界”边界条件意味着，宇宙是从一个均匀各向同性的有序的基态出发，随着宇宙的膨胀，宇宙的非均匀性、各向异性或无序性将逐渐增加。这样，在膨胀相，宇宙学时间箭头是与热力学时间箭头及心理学时间箭头一致的。由于 H-H 宇宙波函数是 CPT 及 T 不变的，霍金曾认为[118]，在收缩相，宇宙的熵和无序性将减少，宇宙在趋近大挤压 (big crunch) 奇点时，有序度将增加。总之，收缩相是膨胀相的时间反演，二者是完全对称的。这意味着上述三个时间箭头在收缩相都要倒过来。用霍金的话说：“处于收缩相的人们将以倒退的方式生活着：他们在出生之前即已死去，并随宇宙的收缩而变得更年轻些”[118]。

佩奇在同一年指出[119]，虽然霍金的宇宙波泛函的确是 CPT 及 T 不变的，但它的个别 WKB 分量却并非是 CPT 及 T 不变的，而正是这种 WKB 分量的存在将破坏 T 的不变性。拉夫拉姆 (Laflamme) 和谢拉德 (Shellard) 发现[120]，在一个

稍微复杂的宇宙模型中，宇宙的坍缩相与膨胀相大不相同，即令哈特–霍金的简单模型是对的，宇宙收缩相也可能永不出现。这是由于宇宙如果到达收缩相之前已进入热寂状态，热力学时间箭头和宇宙学时间箭头就都不存在了，因此没有理由说收缩的热力学时间箭头将反向。随后的工作表明，在收缩相中，微扰模式不仅不会消失以回到基态，而是要随时间而增长，以致宇宙的无序度不断增加。

10.7 欧几里得虫洞

早在 20 世纪 50 年代，惠勒就曾指出，我们没有理由认为宇宙的时空流形拓扑一定是平凡的单连通的。例如，由弯曲时空量子场论知道，在普朗克尺度附近，物质场的量子涨落将使得时空发生涨落，其结果是时空流形将出现泡沫状结构 (quantum foam) 或多连通结构，从而在时空各处出现手柄 (handle) 或虫洞。霍金曾指出，有两类进入黑洞的粒子，其一是坍缩中进入黑洞的粒子，其二是蒸发中从视界外进入黑洞的粒子。如果黑洞可完全蒸发掉，进入黑洞的这两类粒子的下落如何？霍金认为，一个最自然的解释是：掉入黑洞的粒子 (图 10.10) 将进入一个由我们所在的母宇宙分岔出去的子宇宙中去。无论是出现微观虫洞 (子宇宙)，还是出现宏观子宇宙 (虫洞)，都足以说明宇宙可能具有复杂的多连通结构。

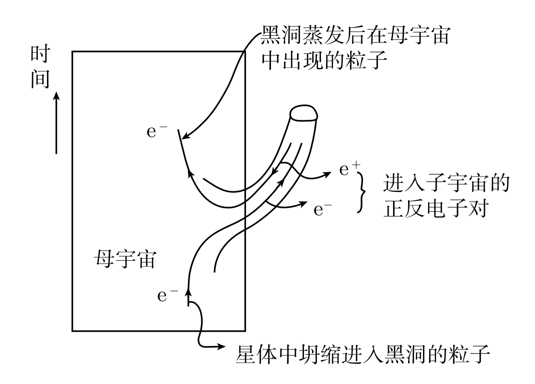


图 10.10 掉入黑洞的粒子进入子宇宙或虫洞

然而，在经典广义相对论框架下，杰拉奇 (Geroch) 证明了一个定理[121]，它表明拓扑分岔或拓扑变化在一个既没有奇异性又没有闭合类时线的紧致的洛伦兹时空中决不会出现。杰拉奇定理表述如下：

设 $\mathcal{M}$ 为一紧致几何，其边界为两个不连接的紧致类空 3 流形 Z 和 Z' 的并集，如果 $\mathcal{M}$ 是等时序的 (isochronous) 或时间可定向的 (time-orientable), 且无闭合类时线 (closed timelike curve, CTC) 和奇点，则 Z 和 Z' 为微分同胚，且 $\mathcal{M} = Z \otimes [0,1]$。

基于杰拉奇定理，虫洞只能出现在欧几里得空间或具有奇点或具有闭合类时线的非紧致洛伦兹时空。前者表示，这只能是一种无法进行时空描述的量子过程, 本节集中讨论这类虫洞。

10.7.1 虫洞解

1. 霍金解

霍金提出[122], 对应于虫洞的 W-D 方程的解，应该满足适当的边界条件，即 (1) 在渐近无穷远或洞口外，虫洞波函数应衰减为 0; (2) 在其他情况下，虫洞波函数应是正规的。

在共形耦合标量场情况下，如 10.4 节, 令 $x=\sqrt{2}\pi\sigma a$ 中, 将 x 在 3 球面上按调和函数 Q_n 展开, 即 $x=\sum\limits_n f_n Q_n$, 当引力处于基态时, 波函数可写乘积的形式 $\varPsi(a,x)=\varPsi_0(a)\Pi_n\psi_n(f_n)$。在此近似下, W-D 算子作用于不同的模上, 有相同的形式,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a}-a^2\right)\varPsi_0(a),\quad \left(-\frac{\partial^2}{\partial f_n^2}+(n^2+1)f_n^2\right)\varPsi_n(f_n),\tag{10.7.1}$$

且各模间没有相互作用。各模可取谐振子波函数的形式

$$\varPsi_0(a)\propto \mathrm{e}^{-a^2/2}H_l(a),\quad \varPsi_{n1}(f_n)\propto \mathrm{e}^{-(n^2+1)^{1/2}f_n^2/2}H_1((n^2+1)^{1/4}f_n),\tag{10.7.2}$$

其中，H_l 是厄米 (Hermite) 多项式。

由式 (10.7.2) 知，$\varPsi(a,x)$ 满足霍金的虫洞边界条件。

2. 科尔曼–李 (Coleman-Lee) 解

考虑有质量复标量场与引力的最小耦合欧氏作用量[123]

$$I=\int_{\mathcal{M}}\mathrm{d}^4x\sqrt{g_{\mathrm{E}}}\left(M_{\mathrm{p}}^2R_{\mathrm{E}}+\frac{1}{2}\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi+\frac{1}{2}m^2\phi^*\phi\right)+\text{表面项},\tag{10.7.3}$$

其中

$$\begin{aligned}M_{\mathrm{p}}^2&=\frac{1}{16\pi G},\\ \text{表面项}&=2M_{\mathrm{p}}^2\int_{\partial\mathcal{M}}\mathrm{d}^3xh^{1/2}K_{\mathrm{E}}\sim\text{吉本斯–霍金项},\\ K_{ij}^E&=\nabla_i n_j\sim\partial\mathcal{M}\text{的外曲率或第二基本型在切方向的投影},\\ K_{\mathrm{E}}&=K_i^{Ei}\,。\end{aligned}\tag{10.7.4}$$

令

$$\phi=f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\equiv f(t_{\mathrm{E}})\mathrm{e}^{-\vartheta(t_{\mathrm{E}})},\quad \vartheta\equiv\mathrm{i}\theta\,,\tag{10.7.5}$$

则

$$I = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{g_{\mathrm{E}}}\left(M_{\mathrm{p}}^2 R_{\mathrm{E}} + \frac{1}{2}f^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta + \frac{1}{2}\partial_\mu f\partial^\mu f + \frac{1}{2}m^2 f^2\right)$$
$$= \int \mathrm{d}^4x\sqrt{g_{\mathrm{E}}}\left(M_{\mathrm{p}}^2 R_{\mathrm{E}} - \frac{1}{2}f^2\partial_\mu\vartheta\partial^\mu\vartheta + \frac{1}{2}\partial_\mu f\partial^\mu f + \frac{1}{2}m^2 f^2\right), \quad (10.7.6)$$

注意，式 (10.7.5) 是标量场 $\phi(t)$ 的极坐标表述。

对于闭合宇宙型的欧氏虫洞解

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t_{\mathrm{E}}^2 + a^2(t_{\mathrm{E}})\mathrm{d}\varOmega_3^2 \sim R^1\times S^3\text{拓扑。} \quad (10.7.7)$$

把式 (10.7.7) 代入式 (10.7.6) 后变分，可得 ϑ 方程

$$\frac{\delta I}{\delta\vartheta} = 0$$

或

$$0 = -\int \mathrm{d}^4x'\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x^\mu}\right)}\left[-\frac{1}{2}f^2 g_{\mathrm{E}}^{\lambda\rho}(\partial'_\lambda\vartheta)(\partial'_\rho\vartheta)\sqrt{g_{\mathrm{E}}}\right]\right\}$$
$$= \int \mathrm{d}^4x'\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{1}{2}f^2 g_{\mathrm{E}}^{\lambda\rho}(\partial'_\rho\vartheta\delta^\mu_\lambda + \partial'_\lambda\vartheta\delta^\mu_\rho)\delta(x-x')\sqrt{g_{\mathrm{E}}}\right] \quad (10.7.8)$$
$$=\partial_\mu(\sqrt{g_{\mathrm{E}}}f^2\partial^\mu\vartheta) = \sqrt{g_{\mathrm{E}}}\boldsymbol{\nabla}_\mu(f^2\partial^\mu\vartheta)\text{。}$$

它导致守恒律

$$\boldsymbol{\nabla}_\mu J^\mu = 0, \quad (10.7.9)$$

其中，守恒流为

$$J^\mu \equiv f^2\partial^\mu\vartheta\text{。} \quad (10.7.10)$$

守恒律式 (10.7.9) 在整个流形 $\mathcal{M}$ 上的积分为

$$\int_{\mathcal{M}}\boldsymbol{\nabla}_\mu J^\mu\mathrm{d}\varSigma = \int_{\partial\mathcal{M}} J^\mu\mathrm{d}\varSigma_\mu = 0,$$

其中，$\mathrm{d}\varSigma$ 是 $\mathcal{M}$ 上 4 维不变体元，$\mathrm{d}\varSigma_\mu$ 是边界上的 3 维有向面元。对于式 (10.7.7)，流形只有初态和末态的边界，则上述守恒律定义一个守恒荷

$$q = \int J^0\mathrm{d}\varSigma_0\text{。} \quad (10.7.11)$$

注意：欧化时间常数 t_{E} 的超曲面的协变法矢是 $n_\mu = n_0\delta^0_\mu = \delta^0_\mu$, 超曲面上的诱导度规是 $\mathrm{d}s^2 = h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = a^2\mathrm{d}\varOmega_3^2$，

$$J^0 = f^2\dot{\vartheta}, \qquad \mathrm{d}\varSigma_0 = n_0\sqrt{h}\mathrm{d}^3x, \quad (10.7.12)$$

得

$$q = 2\pi^2 a^3 f^2 \dot{\vartheta}\ 。\tag{10.7.13}$$

这是流经虫洞的守恒荷。我们认为，这一非零荷在虫洞物理中的地位，犹如非零角动量在一个有心势场中的粒子动力学中的地位，或非零磁荷在特 · 胡夫特 - 波利亚考夫 (t'Hooft-Polyakov)- 磁单极动力学中的地位，流经虫洞的非零守恒荷使得联结两个不连通时空流形的虫洞不致于关断掉。

作用量式 (10.7.6) 对 f、a 变分，分别得到 f 的方程

$$\ddot{f} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{f} + f\dot{\vartheta}^2 - m^2 f = 0 \tag{10.7.14}$$

和 a 方程

$$\dot{a}^2 = 1 + \frac{1}{12}M_{\rm p}^{-2}a^2(\dot{f}^2 - f^2\dot{\vartheta}^2 - m^2 f^2), \tag{10.7.15}$$

后者是唯一非平庸的引力场方程 ——$G_{\rm E}^{tt}$ 方程。

下面具体讨论 3 种虫洞解。

3. 吉丁斯–施特罗明格 (Giddings-Ströminger, G-S) 虫洞解[124]

先看一个最简单的情况。令 $m = 0$、$f =$ 常数, 则方程 (10.7.15) 化为

$$\dot{a}^2 = 1 - \frac{1}{12}a^2 M_{\rm p}^{-2} f^2 \dot{\vartheta}^2\ 。\tag{10.7.16}$$

由式 (10.7.13) 可得

$$\dot{a}^2 = 1 - \frac{L^4}{a^4}\,, \tag{10.7.17}$$

$$L^4 \equiv \frac{q^2}{48\pi^4 M_{\rm p}^2 f^2}\ 。\tag{10.7.18}$$

式 (10.7.17) 可看成一个具有动能 $\dot{a}^2$ 的粒子处在一个排斥势场 a^{-4} 中运动，当 $a(t_{\rm E}) \to \infty$ 时, $\dot{a}^2 \to 1$ 或 $a(t_{\rm E}) \to \pm t_{\rm E} + C$; 当 $a(t_{\rm E}) \to L$, $\dot{a} \to 0$ 或 $a(t_{\rm E}) \to$ 常数; 故 3–球在 $a = L$ 处有一个极小值, 并随 $t_{\rm E}$ 变化而膨胀，直至与 $t_{\rm E}$ 线性相关。令 $a(t_{\rm E})|_{t_{\rm E}=0} = L$，这正是一个虫洞的构形 (图 10.11)。

霍金曾对 G-S 虫洞解的合理性提出过质疑[125]。他指出，对最小耦合无质量标量场，W-D 方程为

$$\left[\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a}\left(a\frac{\partial}{\partial a}\right) - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - a^2\right]\Psi(a,\phi) = 0\ 。\tag{10.7.19}$$

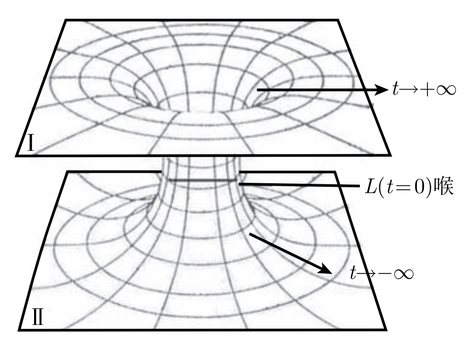


图 10.11 虫洞示意图

引入变量代换

$$\begin{aligned} x &= -a\sinh\phi, \\ y &= -a\cosh\phi, \end{aligned} \tag{10.7.20}$$

W-D 方程化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - y^2 + x^2\right)\Psi(x,y) = 0\text{。} \tag{10.7.21}$$

这是能量反号的两个谐振子的方程，其解为一个分立集合，并有合理的渐近行为。但是，它们并不同于 G-S 虫洞解，后者所对应的 W-D 方程的解为一连续集合，即

$$\Psi(a,\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q\vartheta}\mathrm{K}_q(ia^2)\,, \tag{10.7.22}$$

其中，K_q 为第二类变形贝塞尔函数，q 为守恒荷。W-D 方程的解式 (10.7.22) 当 a 甚大时衰减，但在 $a=0$ 附近无穷振动，因而虫洞是奇异的，并不满足合理的边界条件。

但需注意，霍金在质疑过程中用的是实标量场。而 G-S 虫洞解中用的是复标量场。对于实标量场，守恒荷 q 为零，于是 $L=0$, 确实就不存在 G-S 虫洞解了，但这并不排除在复标量场的情况中 G-S 虫洞解的存在性。

4. 大质量虫洞解[123]

为考虑更多的解，记 $A_- = \phi = f\mathrm{e}^{-\vartheta}$, $A_+ = \phi^* = f\mathrm{e}^{\vartheta}$。引入

$$\begin{aligned} A_0 &\equiv \frac{A_+ + A_-}{2} = f\cosh\vartheta = f\cos(-\mathrm{i}\vartheta) = f\cos(\mathrm{i}\vartheta)\,, \\ A_1 &\equiv \frac{A_+ - A_-}{2} = f\sinh\vartheta = \mathrm{i}f\sin(-\mathrm{i}\vartheta) = -\mathrm{i}f\sin(\mathrm{i}\vartheta)\text{。} \end{aligned} \tag{10.7.23}$$

守恒荷式 (10.7.13) 可用 A 表示为

$$q = 2\pi^2 a^3(A_0\dot{A}_1 - A_1\dot{A}_0) = \pi^2 a^3(A_-\dot{A}_+ - A_+\dot{A}_-)\text{。} \tag{10.7.24}$$

考虑复标量场具有如下对称性，即

$$f(-t_{\mathrm{E}})=f(t_{\mathrm{E}}),\qquad \vartheta(-t_{\mathrm{E}})=-\vartheta(t_{\mathrm{E}}),$$

于是，A_0、A_1、$A_\pm$ 具有下述对称性

$$\begin{aligned}
&A_0(-t_{\mathrm{E}})=f(-t_{\mathrm{E}})\cosh\vartheta(-t_{\mathrm{E}})=f(t_{\mathrm{E}})\cosh[-\vartheta(t_{\mathrm{E}})]=A_0(t_{\mathrm{E}}),\\
&A_1(-t_{\mathrm{E}})=f(-t_{\mathrm{E}})\sinh[\vartheta(-t_{\mathrm{E}})]=-f(t_{\mathrm{E}})\sinh\vartheta(t_{\mathrm{E}})=-A_1(t_{\mathrm{E}}),\\
&A_+(-t_{\mathrm{E}})=A_-(t_{\mathrm{E}}),\quad A_-(-t_{\mathrm{E}})=A_+(t_{\mathrm{E}})\quad (f^2=A_+A_-)。
\end{aligned}\tag{10.7.25}$$

采用新的变量后，利用式 (10.7.8)，可把式 (10.7.14) 变为

$$\ddot{A}+3\frac{\dot{a}}{a}\dot{A}-m^2A=0,\tag{10.7.26}$$

其中，$A=A_0$, A_1 或 $A_\pm$。令 $\mathrm{d}t_{\mathrm{E}}=a^3\mathrm{d}y$, 方程(10.7.26)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}y^2}-k^2A=0,\qquad k\equiv ma^3,\tag{10.7.27}$$

这正是波数为 $k\left(=\dfrac{2\pi}{\lambda}\right)$ 的定态薛定谔方程。该方程可用 WKB 近似方法求解。WKB 近似的条件是

$$k^{-2}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}\ll 1。$$

由于 $k^{-2}\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}y}=3m^{-1}a^{-4}\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}y}=\dfrac{3}{m}\dfrac{\dot{a}}{a}$, 所以 WKB 近似的条件又可写为

$$\frac{3}{m}\frac{\dot{a}}{a}\ll 1。\tag{10.7.28}$$

两个独立的 WKB 近似解为

$$\begin{aligned}
A^{(\pm)}&=k^{-1/2}\exp(\pm\int^y k\mathrm{d}y)=\exp(\pm C)m^{-1/2}a^{-3/2}\exp(\pm mt_{\mathrm{E}})\\
&\equiv N^{\pm1}m^{-1/2}a^{-3/2}\exp(\pm mt_{\mathrm{E}}),
\end{aligned}\tag{10.7.29}$$

其中，C、N 为积分常数的两种不同写法, 具体到 $A_\pm$, 每一个都可有两个解，即

$$\begin{aligned}
A_+^{(\pm)}&=N^{\pm1}m^{-1/2}a^{-3/2}\mathrm{e}^{\pm mt_{\mathrm{E}}},\\
\dot{A}_+^{(\pm)}&=\pm N^{\pm1}m^{1/2}a^{-3/2}\mathrm{e}^{\pm mt_{\mathrm{E}}};\\
A_-^{(\pm)}&=N^{\pm1}m^{-1/2}a^{-3/2}\mathrm{e}^{\pm mt_{\mathrm{E}}},\\
\dot{A}_-^{(\pm)}&=\pm N^{\pm1}m^{1/2}a^{-3/2}\mathrm{e}^{\pm mt_{\mathrm{E}}};
\end{aligned}\tag{10.7.30}$$

在写出上面的 $\dot{A}_{\pm}^{(\pm)}$ 时，再次用到式 (10.7.28)。由式 (10.7.24) 和式 (10.7.30) 易见，若 A_+ 与 A_- 取相同的 (±) 号，则 $q=0$。为得非零守恒荷，应取不同的 (±) 号组合，从而得

$$q = 2\pi^2 \tag{10.7.31}$$

一个方便的取法就是 A_+ 取 (+), A_- 取 (−)。于是，WKB 近似解可写为

$$A_{\pm} = N^{\pm 1} m^{-1/2} a^{-3/2} \mathrm{e}^{\pm m t_{\mathrm{E}}} = N^{\pm 1} \sqrt{\frac{q}{2\pi^2 m a^3}} \mathrm{e}^{\pm m t_{\mathrm{E}}}\,, \tag{10.7.32}$$

$$\dot{A}_{\pm} = \pm N^{\pm 1} m \sqrt{\frac{q}{2\pi^2 m a^3}} \mathrm{e}^{\pm m t_{\mathrm{E}}}\,。 \tag{10.7.33}$$

利用 A 后，a 方程 (10.7.15) 可改写成

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= 1 + \frac{1}{12} M_{\mathrm{p}}^{-2} a^2 \left(\dot{A}_0^2 - \dot{A}_1^2 - m^2 A_0^2 + m^2 A_1^2 \right) \\ &= 1 + \frac{1}{6} M_{\mathrm{p}}^{-2} a^2 \left(\dot{A}_+ \dot{A}_- - m^2 A_+ A_- \right), \end{aligned} \tag{10.7.34}$$

利用式 (10.7.31)∼ 式 (10.7.34) 得

$$\dot{a}^2 = 1 - \frac{L}{a}, \qquad L \equiv \frac{mq}{12\pi^2 M_{\mathrm{p}}^2}\,, \tag{10.7.35}$$

这是一个以 L 为喉半径，q 为荷的虫洞。这个虫洞解不同于 G-S 虫洞解，在 G-S 虫洞解中 $m=0$, 而在这个虫洞解中 $m \neq 0$。不仅如此，由式 (10.7.28) 知，与欧化哈勃 (Hubble) 参量 $\dot{a}/a$ 相比，m 比较大，所以这种虫洞解称为大质量虫洞解。科尔曼和李称其为大虫洞极限。

5. 小质量虫洞解[123]

现在我们来考虑另一个极限 —— 小质量极限。科尔曼和李称其为小虫洞极限。为更精确地说明小质量极限，我们把方程 (10.7.26) 改写为

$$a^2 \ddot{A} + 3a\dot{a}\dot{A} - (ma)^2 A = 0\,。 \tag{10.7.36}$$

如果 m 很小以至于

$$\frac{(ma)^2 A}{a\dot{a}\dot{A}} \ll 1, \qquad \frac{(ma)^2 A}{a^2 \ddot{A}} \ll 1\,,$$

则式 (10.7.36) 近似为

$$a^3 \ddot{A} + 3a^2 \dot{a}\dot{A} = 0\,, \tag{10.7.37}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_{\mathrm{E}}}(a^3 \dot{A}) = 0\,, \tag{10.7.38}$$

由此得

$$\frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_0}=C_1\,,$$

积分得

$$A_1=C_1A_0+C_2\,。\tag{10.7.39}$$

这是在 A_0-A_1 平面内的一根直线。我们总可以在 A_0-A_1 平面内作一个“洛仑兹变换”(荷转动)，以使此直线变为

$$A_0=\text{常数}\quad\text{或}\quad\dot{A}_0=0\,。\tag{10.7.40}$$

由式 (10.7.24) 得

$$q=2\pi^2a^3A_0\dot{A}_1\,,\tag{10.7.41}$$

所以

$$\dot{A}_1=\frac{q}{2\pi^2a^3A_0}\,。\tag{10.7.42}$$

a 方程 (10.7.15) 可变为

$$\dot{a}^2\simeq 1+\frac{1}{12}M_{\rm p}^{-2}a^2(-\dot{A}_1^2)=1-\frac{q^2}{48\pi^4M_{\rm p}^2A_0^2a^4},\tag{10.7.43}$$

或

$$\dot{a}^2=1-\frac{L^4}{a^4},\qquad L^4\equiv\frac{q^2}{48\pi^4M_{\rm p}^2A_0^2}\,。\tag{10.7.44}$$

式 (10.7.40)∼ 式 (10.7.42) 和式 (10.7.44) 给出小质量虫洞的基本方程。从式 (10.7.44) 的形式上看，小质量虫洞解与 G-S 虫洞解相同，然而两者的 f 有完全不同的行为。

注意，当 $t_{\rm E}\to\pm\infty$ 时, $a\to+\infty$. $\dot{a}\to\pm1$；而当 $a\to L$ 时，$\dot{a}=0$, 指定此时的 $t_{\rm E}$ 为 0。于是，

$$\begin{aligned}A_1(\infty)-A_1(-\infty)&=\int_{t_{\rm E}=-\infty}^{+\infty}{\rm d}A_1=\int_{\infty(t_{\rm E}=-\infty)}^{\infty(t_{\rm E}=+\infty)}\frac{\dot{A}_1}{\dot{a}}{\rm d}a\\&=\left(\int_{\infty(t_{\rm E}=-\infty)}^{L(t_{\rm E}=0)}+\int_{L(t_{\rm E}=0)}^{\infty(t_{\rm E}=+\infty)}\right)\frac{\dot{A}_1}{\dot{a}}{\rm d}a\\&=2\int_{L(t_{\rm E}=0)}^{\infty(t_{\rm E}=+\infty)}\frac{\dot{A}_1}{\dot{a}}{\rm d}a=\frac{q}{\pi^2A_0}\int_L^\infty\frac{{\rm d}a}{\sqrt{a^6-L^4a^2}}\\&=\frac{q}{4\pi A_0L^2}\,。\end{aligned}\tag{10.7.45}$$

另外，由式 (10.7.30) 及式 (10.7.25) 知,

$$\begin{aligned}0&=A_+(-\infty)+A_-(+\infty)=2A_+(-\infty)=2A_-(+\infty)\\&=2A_0+A_1(-\infty)-A_1(+\infty)\,,\end{aligned}$$

比较上两个式子，有

$$A_0^2 = \frac{q}{8\pi L^2} = \frac{\sqrt{3}\pi M_{\rm p} A_0}{2}\,,$$

即

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi M_{\rm p}\,, \tag{10.7.46}$$

或

$$L^2 = \frac{q}{6\pi^3 M_{\rm p}^2}\,, \tag{10.7.47}$$

即流经小质量虫洞喉的荷正比于 $M_{\rm p}^2 L^2$，且比例系数是确定的 $6\pi^3$。与之成为对照的是，流经 G-S 虫洞喉的荷正比于 $M_{\rm p} L^2$, 且比例系数依赖于 f(= 常数) 的大小。

10.7.2 欧几里得虫洞 (子宇宙) 对场论的影响

欧几里得虫洞 (子宇宙) 对母宇宙中的场论会带来重要的影响。现在我们来简要讨论这种影响。

1. 与虫洞耦合的有效作用量

考虑一欧氏母宇宙与若干欧氏虫洞 (子宇宙) 组成的系统。假定存在不同种类的虫洞，这些虫洞可用它们的大小、所携带的荷等加以区分。为计算简单，我们用分立变量 i 来标记不同种类的虫洞。对每一种虫洞都可引入产生、湮灭算子 a_i、$a_i^\dagger$ 来描述，它们满足如下对易子代数

$$[a_i, a_j] = \left[a_i^\dagger, a_j^\dagger\right] = 0, \qquad \left[a_i, a_j^\dagger\right] = \delta_{ij}\,。 \tag{10.7.48}$$

这种与虫洞耦合系统的有效作用量由下述定理给出。

定理[126] 设 $\mathscr{L}_0(\phi)$ 为不考虑欧氏虫洞 (子宇宙) 时母宇宙中 $\phi(x)$ 场的拉氏量, $\mathscr{L}_i(\phi)$ 为第 i 种虫洞 (子宇宙) 与 ϕ 场的耦合，则虫洞 (子宇宙) 的存在等效于在母宇宙中引入如下的有效欧氏拉氏量 $\mathscr{L}_{\rm eff}$，以代替欧氏拉氏量 $\mathscr{L}_0$，即

$$\mathscr{L}_{\rm eff} = \mathscr{L}_0(\phi(x)) + \sum_i \mathscr{L}_i(\phi(x)) \cdot (a_{i^*}^\dagger + a_i)\,, \tag{10.7.49}$$

其中，i^* 为“i”的 CPT 对应。相应的有效欧氏作用量和配分函数为

$$\begin{aligned} I_{\rm eff} &= \int {\rm d}^4x\sqrt{g_{\rm E}}\mathscr{L}_{\rm eff} = \int {\rm d}^4x\sqrt{g_{\rm E}}\left[\mathscr{L}_0 + \sum_i \mathscr{L}_i \cdot (a_{i^*}^\dagger + a_i)\right] \\ &= I_0 + \sum_i \int {\rm d}^4x\sqrt{g_{\rm E}}\mathscr{L}_i \cdot (a_{i^*}^\dagger + a_i) \equiv I_0 + \sum_i I_i\,, \end{aligned} \tag{10.7.50}$$

$$Z \simeq \exp\{-I_{\text{eff}}\} = \mathrm{e}^{-I_0} \cdot \mathrm{e}^{-\sum_i I_i} = \mathrm{e}^{-I_0} \prod_i \mathrm{e}^{-I_i} \text{。}$$

可以看出，$a_{i*}^{\dagger}$ 与 a_i 的组合是与 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 的 CPT 不变性相容的。

证　我们仅对某一给定种类的虫洞 (第 i 种) 加以证明, 各种虫洞的总效应是不同种虫洞效应的迭加。

设 $\mathcal{M}$ 为连结 3 球 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 的 4- 流形 ($\mathcal{M} = R^1 \otimes S^3$)，如图 10.12 所示。

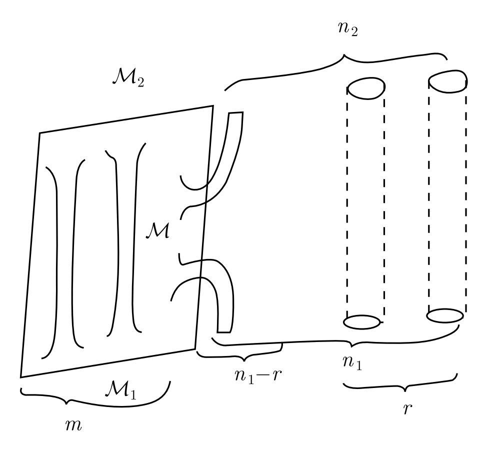


图 10.12　母宇宙与子宇宙

初态: 3 球母空间 $\mathcal{M}_1$, 第 i 种子宇宙 $n_1 = r+(n_1-r)$, 其中 r 为与母宇宙不连通的第 i 种子宇宙数, (n_1-r) 为与母宇宙 $\mathcal{M}$ 连通的第 i 种半截虫洞 (semi-wormhole) 数;

末态: 3 球母空间 $\mathcal{M}_2$, 第 i 种子宇宙 $n_2 = r+(n_2-r)$，其中 (n_2-r) 为与母宇宙 $\mathcal{M}$ 连通的末态第 i 种半截虫洞 (子宇宙) 数, m 是在 $\mathcal{M}$ 内的第 i 种虫洞数。

在 n_1 和 n_2 给定的情况下，对所有可能出现的不等价 (第 i 种) 虫洞、半截虫洞和子宇宙等中间几何求和, 可得

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-I_i} = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\min(n_1,n_2)} \frac{1}{\sqrt{n_1!}} \times \frac{1}{\sqrt{n_2!}} \\ & \times (\mathrm{e}^{-I_{\mathrm{w}}})^{2m+n_1+n_2-2r} \\ & \times \frac{(kV_4)^{2m}}{(2m)!} \frac{(kV_4)^{n_1-r}}{(n_1-r)!} \frac{(kV_4)^{n_2-r}}{(n_2-r)!} \\ & \times \frac{(2m)!}{m!2^m} \frac{n_1!}{r!} \frac{n_2!}{r!} r!\,, \end{aligned} \tag{10.7.51}$$

其中，I_{w} 为半截虫洞的欧氏作用量，于是整个虫洞的作用量为 $2I_{\mathrm{w}}$。在写出式 (10.7.51) 时，先假设所有虫洞和所有子宇宙都是可分辨的，然后再扣除重复计算的结果。

式 (10.7.51) 的第一行：若子宇宙是可分辨的，有 n 个初态和 n 个末态子宇宙的各种可能的对接方式应出现因子 $n!$，但实际上，子宇宙都是等同的，故应乘以 $\dfrac{1}{n!}=\dfrac{1}{\sqrt{n!}}\dfrac{1}{\sqrt{n!}}$，以消除过多计算的数目，因此应在初态和末态中各引入因子 $\dfrac{1}{\sqrt{n!}}$。

第二行：所有与母宇宙有关的虫洞和半截虫洞的作用量之和。

第三行：对所有虫洞和半截虫洞与母宇宙的所有可能交换位置进行积分，几率幅将与 $V_4=\int_M\sqrt{g}\mathrm{d}^4x$ 成正比，设比例常数为 k；除以 $(2m)!(n_1-r)!(n_2-r)!$ 为消除重复计算数。

第四行：为组合因子的积，其中 $\dfrac{(2m!)}{m!2^m}$ 为虫洞端点的配对数，这是因为 $2m$ 个不同端点，每 2 个一组，分成 m 组，其组合数为 $\dfrac{(2m)!}{2^m}$，由于 m 个排列无意义，应除以 $m!$；$\dfrac{n_1!}{r!}=\dfrac{n_1!}{[n_1-(n_1-r)]!}$ 为过去子宇宙与母宇宙配接方式数；$\dfrac{n_2!}{r!}=\dfrac{n_2!}{[n_2-(n_2-r)]!}$ 为未来子宇宙与母宇宙配接方式数; 最后一个因子 $r!$ 是 r 个过去与未来都没有与母宇宙相联的子宇宙的对接方式数。

注意：

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(kV_4\mathrm{e}^{-I_\mathrm{w}})^{2m}}{2^m m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left[\frac{(kV_4\mathrm{e}^{-I_\mathrm{w}})^2}{2}\right]^m=\mathrm{e}^{\beta^2/2},$$

其中

$$\beta\equiv kV_4\mathrm{e}^{-I_\mathrm{w}},$$

故

$$\mathrm{e}^{-I_i}=\sqrt{n_1!}\sqrt{n_2!}\mathrm{e}^{\beta^2/2}\sum_{r=0}^{\min(n_1,n_2)}\frac{\beta^{n_1+n_2-2r}}{(n_1-r)!(n_2-r)!r!}。\tag{10.7.52}$$

另外，

$$\begin{aligned}\langle n_2|\mathrm{e}^{\beta(a_i+a_{i^*}^\dagger)}|n_1\rangle&=\mathrm{e}^{\beta^2/2}\langle n_2|\mathrm{e}^{\beta a_{i^*}^\dagger}\mathrm{e}^{\beta a_i}|n_1\rangle\\&=\mathrm{e}^{\beta^2/2}\sum_{r=0}^{\infty}\langle n_2|\sum_s\frac{(\beta a_{i^*}^\dagger)^s}{s!}|r\rangle\langle r|\sum_t\frac{(\beta a_i)^t}{t!}|n_1\rangle\\&=\mathrm{e}^{\beta^2/2}\sum_{r=0}^{\infty}\langle n_2|\frac{(\beta a_{i^*}^\dagger)^{n_2-r}}{(n_2-r)!}|r\rangle\langle r|\frac{(\beta a_i)^{n_1-r}}{(n_1-r)!}|n_1\rangle\\&\quad(\text{只有 } n_1-t=r=n_2-s \text{ 的项保留，}\\&\quad\quad\text{其他项的贡献都为零})\\&=\mathrm{e}^{\beta^2/2}\sum_{r=0}^{\min(n_1,n_2)}\frac{\beta^{n_1+n_2-2r}}{(n_1-r)!(n_2-r)!r!}\sqrt{n_1!}\sqrt{n_2!}。\end{aligned}\tag{10.7.53}$$

在计算中我们采用了规一化 $\langle n_1|n_1\rangle = \sqrt{n_1!/r!}$ 和 $\langle n_2|n_2\rangle = \sqrt{n_2!/r!}$，在第一个等式中，我们运用了公式 $\mathrm{e}^{\beta(\hat{A}+\hat{B})} = \mathrm{e}^{\beta\hat{B}} \cdot \mathrm{e}^{\beta\hat{A}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{2}[\hat{B},\hat{A}]}$ 及 $\left[a^\dagger, a\right] = -1$。

显然, 式 (10.7.53) 与式 (10.7.52) 的右边相等，故应有 I_i 正比于 $a_i + a_{i^*}^\dagger$，$\beta \sim \displaystyle\int \sqrt{g_{\mathrm{E}}}\mathrm{d}^4x\mathscr{L}_i$。证毕。

应指出，有效拉氏量式 (10.7.50) 在 $\Theta = CPT$ 变换下的不变性。事实上，

$$
\begin{aligned}
CPT\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}T^{-1}P^{-1}C^{-1} &= \mathscr{L}_0 + \sum_i \mathscr{L}_i CPT(a_{i^*}^\dagger + a_i)T^{-1}P^{-1}C^{-1} \\
&= \mathscr{L}_0 + \sum_i \mathscr{L}_i(a_i + a_{i^*}^\dagger) = \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}\,,
\end{aligned} \tag{10.7.54}
$$

即有效拉氏量式 (10.7.50) 在 Θ 变换下的不变性要求虫洞 (子宇宙) 的产生、湮灭算符须以 $(a_{i^*}^\dagger + a_i)$ 的形式出现于 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}$ 中。

最后需指出，虫洞 (子宇宙) 的产生、湮灭算符与时空无关 $(\partial_\mu a_i = 0)$，表示闭合子宇宙的总能量和总动量都为 0，这是由于

$$
\langle 1|\partial_\mu|1\rangle = \langle 0|a_i\partial_\mu a_i^\dagger|0\rangle = 0\text{。}
$$

2. 量子相干性的丢失问题

设 $|\phi, n\rangle \equiv |\phi\rangle|n\rangle$ 为物质场 ϕ 和 n 个子宇宙的态。我们考虑一个子宇宙的创生，如图 10.13 所示。设入射态为纯态 $|\mathrm{in}\rangle = |\phi^{\mathrm{in}}, 0\rangle$，密度算符为 $\hat{\rho}^{\mathrm{in}} = |\phi^{\mathrm{in}}, 0\rangle\langle\phi^{\mathrm{in}}, 0|$，经散射后，末态变为 $|\phi^{\mathrm{out}}, 0\rangle_1$ 和 $|\phi^{\mathrm{out}}, 1\rangle_2$ 的不相干叠加态或混合态，故

$$
|\mathrm{out}\rangle = |\phi^{\mathrm{out}}, 0\rangle_1 + |\phi^{\mathrm{out}}, 1\rangle_2\,, \tag{10.7.55}
$$

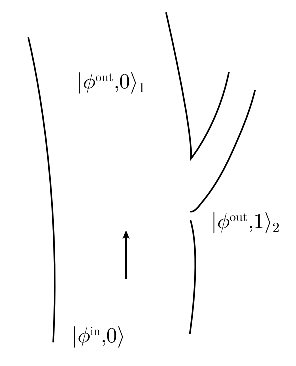


图 10.13　一个子宇宙的创生

密度算符为

$$
\hat{\rho}^{\mathrm{out}} = C_1^2|\phi^{\mathrm{out}}, 0\rangle_1\ {}_1\langle 0, \phi^{\mathrm{out}}| + C_2^2|\phi^{\mathrm{out}}, 1\rangle_2\ {}_2\langle 1, \phi^{\mathrm{out}}|\,, \tag{10.7.56}
$$

其中，C_1^2 和 C_2^2 分别是 $|\phi^{\rm out},0\rangle_1$ 态与 $|\phi^{\rm out},1\rangle_2$ 态的统计权重。用密度矩阵表示，有

$$\begin{aligned}
&{\rm Tr}\rho^{\rm in}=\langle{\rm in}|\hat\rho^{\rm in}|{\rm in}\rangle=\langle{\rm in}|\phi^{\rm in},0\rangle\langle\phi^{\rm in},0|{\rm in}\rangle=1\,, &(10.7.57)\\
&{\rm Tr}[(\rho^{\rm in})^2]=1={\rm Tr}\rho^{\rm in}\qquad(\text{此为纯态的充要条件}),\\
&{\rm Tr}\rho^{\rm out}=\langle{\rm out}|\hat\rho^{\rm out}|{\rm out}\rangle\\
&\quad=\langle{\rm out}|\left(|\phi^{\rm out},0\rangle_1C_1^2\,{}_1\langle0,\phi^{\rm out}|+|\phi^{\rm out},1\rangle_2C_2^2\,{}_2\langle1,\phi^{\rm out}|\right)|{\rm out}\rangle\\
&\quad=C_1^2+C_2^2=1\,, &(10.7.58)\\
&{\rm Tr}[(\rho^{\rm out})^2]=\langle{\rm out}|(\hat\rho^{\rm out})^2|{\rm out}\rangle\\
&\quad=\langle{\rm out}|\left(|\phi^{\rm out},0\rangle_1C_1^2\,{}_1\langle0,\phi^{\rm out}|+|\phi^{\rm out},1\rangle_2C_2^2\,{}_2\langle1,\phi^{\rm out}|\right)\\
&\qquad\left(|\phi^{\rm out},0\rangle_1C_1^2\,{}_1\langle0,\phi^{\rm out}|+|\phi^{\rm out},1\rangle_2C_2^2\,{}_2\langle1,\phi^{\rm out}|\right)|{\rm out}\rangle\\
&\quad=C_1^4+C_2^4<1={\rm Tr}\rho^{\rm out}。
\end{aligned}$$

定义量子相干性的丢失 (the loss of quantum coherence) 为

$$1-{\rm Tr}(\rho^2),$$

则纯态变为混合态时一定有量子相干性的丢失。

以黑洞蒸发为例[126]，如图 10.14 所示，入射态 $|0\rangle_{\rm in}$ 变为二个出射态的完备集，因而存在关系

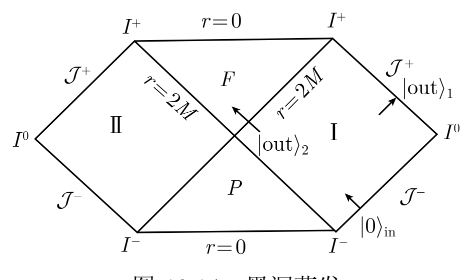


图 10.14　黑洞蒸发

$$|0\rangle_{\rm in}\sim|{\rm out}\rangle_2+|{\rm out}\rangle_1,\tag{10.7.59}$$

如果黑洞可以完全蒸发掉，则入射纯态 $|0\rangle_{\rm in}$ 变为出射混合态 $|{\rm out}\rangle_1$，且后者不构成完备集而导致信息或者量子相干性的丢失。用场论中散射矩阵 S 来表示，就是

$$S|0\rangle_{\rm in}=|{\rm out}\rangle_1\,,\tag{10.7.60}$$

其中，S 矩阵不幺正。

当创生一个子宇宙时，对于母宇宙的观察者而言，入射纯态变为一个统计分布的混合末态，因而量子相干性丢失，且 $S|\phi^{\text{in}},0\rangle=|\phi^{\text{out}},0\rangle$ 中的 S 不幺正。但对于 $A_i=a_i+a_i^\dagger$ 的本征态，量子相干性是不丢失的。后一情况可如下证明。

设

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}=\mathcal{H}_0(\phi)+\sum_i\mathcal{H}_i(\phi)A_i \tag{10.7.61}$$

为闵可夫斯基时空的有效哈密顿密度，A_i 是子宇宙的某个算符。再设 $\{\mathcal{H}_i\}$ 为一线性独立的厄米函数集，由 $\mathcal{H}$ 的厄米性知，所有 A_i 也应是厄米的，即

$$A_i=A_i^\dagger\text{。}$$

又对于所有子宇宙，算符 A_i 与时空显示无关，即

$$\partial_\mu A_i=0\,, \tag{10.7.62}$$

且与物质场对易

$$[\mathcal{H}_i,A_j]=0\quad\forall i,j(\text{包含}i=0)\text{。} \tag{10.7.63}$$

因此

$$[\mathcal{H}(x),\mathcal{H}(y)]=0=\sum_{i,j}\mathcal{H}_i(x)\mathcal{H}_j(y)[A_i,A_j], \tag{10.7.64}$$

其中，已用到不同子宇宙之间的间隔是类空间隔。由 $\mathcal{H}_i$ 的线性独立性得

$$[A_i,A_j]=0\,, \tag{10.7.65}$$

特别是，当 $A_i=a_i+a_i^\dagger$ 时，有

$$\left[(a_i+a_i^\dagger),(a_j+a_j^\dagger)\right]=[a_i,a_j]+[a_i,a_j^\dagger]+[a_i^\dagger,a_j]+[a_i^\dagger,a_j^\dagger]=0. \tag{10.7.66}$$

已知一组对易的厄米算符可同时对角化，也即存在一本征态矢，它是所有 A_i 算符的共同本征态矢，由海森伯 (Heisenberg) 运动方程

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_i=[A_i,H]=0 \tag{10.7.67}$$

可知，在时间演化中，在任一局部算符作用下，所有 A_i 的本征态始终保持为本征态。因此，A 的初始本征态在时间演化中不会丢失其相干性。这就为解决黑洞霍金辐射中量子相干性丢失问题提供了一种解决方案。

应指出：由于 $[a^\dagger a,(a^\dagger+a)]\neq 0$，所以任意确定数目的子宇宙态都不是 $A=a^\dagger+a$ 的本征态，而 A 的本征态只能是所有可能的 $N=a^\dagger a$ 的本征态的叠加。

还需特别指出：解决黑洞霍金辐射中量子相干性丢失问题不仅有虫洞 (子宇宙) 这一个方案，还有其他可以替代的方案。例如，找到某种机制使黑洞不可能完全蒸发掉，从而使得式 (10.7.60) 不再成立，并恢复 S 的幺正性。文献 [8] 就给出这样一种机制，9.7 节给出另一种使得黑洞不能完全蒸发掉的机制。避免 S 矩阵出现不幺正情况的另一种方案是，考虑黑洞蒸发时计及霍金辐射对时空背景的反作用，这种方法也可解决黑洞信息丢失问题[127, 128]。

欧几里得虫洞还曾用来解释宇宙学常数为零的问题[129]，但因 20 世纪末至 21 世纪初宇宙学观测发现, 我们生活的宇宙正处于加速膨胀阶段[130−137]，相当于有一个正的宇宙学常数。这至少说明现有的欧几里得虫洞方法还太过粗糙。

10.8 其他量子宇宙学模型简介

宇宙创生问题是人类理性最希望理解而又最难理解的一个问题，上述量子宇宙学的两种不同理论是人类理性的伟大尝试。1998 年，戈特 (Gott) 和李立新提出一个宇宙不创生于“无”而是自我创生的模型[138]，这是量子宇宙学的一个新进展。此外，量子宇宙学的思想不仅用于基于广义相对论的宇宙学，还推广到基于其他引力理论的宇宙学。例如：

(1) $f(R)$ 的普遍情况

维兰金[139] 和霍罗维茨[140] 曾在均匀各向同性宇宙中考虑 $f(R)$ 普通情况下的量子宇宙学，至少对于 $f(R) = R^2$ 的情况，结论与爱因斯坦引力和有质量标量场耦合的模型相似。布韦尔[141] 曾考虑过

$$f(R) = \Lambda + R - \alpha C^{abcd}C_{abcd} + \beta R^2 \tag{10.8.1}$$

的量子宇宙学。

(2) 布兰斯–迪克 (Brans-Dicke, BD) 量子宇宙学。有两点理由促使人们去建立 B-D 量子宇宙学。其一，前田 (Maeda) 指出，在 10 维时空超弦理论中，如果假设 6 维额外空间为里奇平的卡拉比 - 丘 (Calabi-Yau) 空间，则 10 维时空的爱因斯坦作用量正好等于 4 维时空的 B-D 作用量[142]；其二，刘辽、范黎和黄超光发现，4 维爱因斯坦引力理论经过时空的共形量子涨落可变为 4 维 B-D 引力理论[143]。因此，在极早期宇宙，基于 B-D 引力理论的量子宇宙学可能是有意义的。B-D 量子宇宙学首先由刘辽、黄超光于 1987∼1988 年建立起来[144−166]，以后经过朱宗宏[147, 148]、向应明[149]、肖兴国[150, 151] 等的进一步研究，更丰富了 B-D 量子宇宙学。

(3) 诱生引力量子宇宙学。徐一鸿 (Zee) 首先把对称性自发破缺思想引入到引力理论中来，建立了诱生引力理论[152]，此理论与爱因斯坦理论目前尚无法用实验来区分。徐曾指出，在标量曲率很大或接近曲率奇点时，两种理论应存在很大的差

别，然而这时引力的量子效应将变得十分重要，这就导致人们去建立诱生引力的量子宇宙学。进行这方面工作的有莫厚俊、方励之[153]、沈有根、谭振强[154]，王文德、陶才德[155] 和许建梅等[156]。

(4) 圈量子宇宙学。自 20 世纪 80 年代末、90 年代初开始，人们尝试一种新的引力场量子化方案 —— 圈量子化方案[157−159]。将这种引力量子化方案用于宇宙学就得到圈量子宇宙学[160−163]。在圈量子宇宙学中，引力的基本变量为选择约化的和乐 (holonomy) 和体积，在理论中引入一个自由的无质量标量场作为时间，采用相干态表象，将量子哈密顿约束方程化为一个差分方程，得到宇宙反弹的图像，而非宇宙创生于无的图像。圈量子宇宙学成为 21 世纪初量子宇宙学的研究热点。

参 考 文 献

[1] Birrell N D, Davies P C W. Quantum Fields in Curved Space. Cambridge: Cambridge University Press, 1982

[2] 刘辽, 赵峥, 田贵花, 等. 黑洞与时间的性质. 北京：北京大学出版社, 2008

[3] 李立新. 黑洞物理：引力影响物态方程；虫洞物理：耦合常数和时间机器. 师范大学硕士学位论文, 北京师范大学, 北京, 1995

[4] Weinberg S. 引力论和宇宙论: 广义相对论的原理和应用. 邹振隆、张历宁, 等译. 北京：科学出版社, 1972

[5] Wald R M. General Relativity. Chicago: The University of Chicago Press, 1984

[6] 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论. 第二版. 北京: 科学出版社, 2006

[7] Miser C W, Thorne K S, Wheeler J A. Gravitation. San Francisco: W. H. Freeman and Comapnay, 1973

[8] Bowick M J, Smolin L, Wijewardhana L C R. Does string theory solve the puzzles of black hole evaporation? Gen. Rel. Grav., 1987, **19**: 113-119

[9] 刘辽, 裴寿镛. Sommerfeld's quantum condition of action and the spectra of quantum Schwarzschild black hole. Chin. Phys. Lett., 2004, **21**: 1887-1889

[10] Kruskal M. Maximal extension of Schwarzschild metric. Phys. Rev., 1960, **119**: 1743-1745

[11] Hawking S W, Ellis G F R. The large scale structure of space-time. Cambridge: Cambridge University Press, 1973

[12] Bondi H, Gold T. The steady-state theory of the expanding universe. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1948, **108**: 252-270

[13] Hoyle F. A new model for the expanding universe. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1948, **108**: 372-382

[14] Hoyle F. On the cosmological problem. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1949, **109**: 365-371

[15] Robertson H P. On relativistic cosmology. Phil. Mag., 1928, **5**: 835-848

[16] Pfautsch J D. A new vacuum state in de Sitter space. Phys. Lett. B., 1982, **117**: 283-286

[17] Einstein A. Kosmologgische betrachtungen zur allgemeinen relativitätstheorie. Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 1917, 142-152

[18] Milne E A. World structure and the expansion of the universe. Nature, 1932, **130**: 9-10

[19] Rindler W. Essential Relativity. New York: Van Nostrand, 1969

[20] Schützhold R, Schaller G, Habs D. Signatures of the Unruh effect from electrons accelerated by ultrastrong laser fields. Phys. Rev. Lett., 2006, **97**: 121302

[21] Letau J R, Pfaufsch J D. Quantized scalar field in rotating coordinates. Phys. Rev. D, 1980, **22**: 1345-1351

[22] Fulling S A, Davies P C W. Radiation from a moving mirror in two dimensional space-time: conformal anomaly. Proc. R. Soc., London A, 1976, **348**: 393-414

[23] Davies P C W, Fulling S A. Radiation from moving mirrors and from black holes. Proc. R. Soc., London A, 1977, **356**, 237-257

[24] Moore G T. Quantum theory of the electromagnetic field in a variable-length one-dimensional cavity. J. Math. Phys., 1970, **11**: 2679-2692

[25] Hawking S W. Black hole explosions? Nature, 1974, **248**: 30-31

[26] Hawking S W. Particle creation by black holes. Commun. Math. Phys., 1975, **43**: 199-220

[27] Kadanoff L P, Baym G. Quantum Statistical Mechanics — Green's function methods in equilibrium and nonequilibrium problems. New York: W. A. Benjamin, 1962

[28] Gibbons G W, Perry M J. Black holes and thermal Green functions. Proc. R. Soc. Lond. A, 1978, **358**: 467-494

[29] 刘辽. Feynman's path-integral method and Hawking evaporation//Proc. 3rd Marcel Grassmann Meeting on General Relativity. Beijing: Science Press, 1983: 1209-1215

[30] 刘辽. 费曼路径积分和霍金蒸发. 物理学报, 1982, **31**: 519-524

[31] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series, and Products. 7th edition. Amstevdam: Elsevier, 1965

[32] Boulware D G. Quantum field theory in Schwarzschild and Rindler spaces. Phys. Rev. D, 1975, **11**: 1404–1423

[33] Boulware D G. Spin-1/2 quantum field theory in Schwarzschild space. Phys. Rev. D, 1975, **12**: 350-367

[34] Hartle J B, Hawking S W. Path-integral derivation of black-hole radiance. Phys. Rev. D, 1976, **13**: 2188-2203

[35] Unruh W G. Notes on black-hole evaporation. Phys. Rev. D, 1976, **14**: 870-892

[36] Candelas P. Vacuum polarization in Schwarzschild spacetime. Phys. Rev. D, 1980, **21**: 2185-2202

[37] Letau J R, Pfaufsch J D. Quantized scalar field in the stationary coordinate systems of flat spacetime. Phys. Rev. D, 1981 **24**: 1491-1498

[38] Christensen S M. Regularization, renormalization, and covariant geodesic point separation. Phys. Rev. D, 1978, **17**: 946-963

[39] Watson G N. Theory of Bessel Functions. Cambridge: The University Press, 1922: 178

[40] Bekenstein J D, Parker L. Path integral evaluation of Feynman propagator in curved spacetime. Phys. Rev. D, 1981, **23**: 2850-2869

[41] Gilkey P B. The spectral geometry of a Riemannian manifold. J. Diff. Geom., 1975,

10: 601-618

[42] 喻乃昌. de Sitter 时空中的真空能动张量. 物理学报, 1984, **33**: 1759-1764

[43] 许殿彦, 王辉毓. Vacuum polarization energymomentum tensors for scalar field in curved spacetime. Acta Math. Scien., 1990, **10**: 135

[44] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数论. 北京：科学出版社, 1979

[45] Adler S L, Lieberman J, Ng Y J. Regularization of the stress-energy tensor for vector and scalar particles propagating in a general background metric. Ann. Phys. (NY), 1977, **106**: 279-321

[46] Deutsch D, Candelas P. Boundary effects in quantum field theory. Phys. Rev. D, 1979, **20**: 3063-3080

[47] Kennedy G, Critchley R, Dowker J S. Finite temperature field theory with boundaries: Stress tensor and surface action renormalisation. Ann. Phys. (NY), 1980, **125**: 346-400

[48] Sparnaay M J. Attractive forces between flat plates. Nature, 1957, **180**: 334-335.

[49] Sparnaay M J. Measurements of attractive forces between flat plates. Physica, 1958, **24**: 751-764

[50] Lamoreaux S K. Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μm Range. Phys. Rev. Lett., 1997, **78**: 5-8

[51] Mohideen U, Roy A. Precision Measurement of the Casimir Force from 0.1 to 0.9 μm. Phys. Rev. Lett., 1998, **81**: 4549-4552

[52] Dowker J S, Kennedy G. Finite temperature and boundary effects in static spacetimes. J. Phys. A: Gen. Phys., 1978, **11**: 895-920

[53] Balian R, Duplantier B. Electromagnetic waves near perfect conductors Ⅰ. Multiple scattering expansions. Distribution of modes, Ann. Phys., 1977, **104**: 300-335

[54] Balian R, Duplantier B. Electromagnetic waves near perfect conductors Ⅱ. Casimir effect. Ann. Phys., 1978, **112**: 165-208

[55] Ambjørn J, Wolfram S. Properties of the vacuum I. mechanical and thermodynamic. Ann. Phys., 1983, **147**: 1-32

[56] Candelas P, Deutsch D. Fermion fields in accelerated states. Proc. R. Soc, London, A, 1978, **362**: 251-262

[57] Candelas P, Raine D J. General-relativistic quantum field theory: An exactly soluble model. Phys. Rev. D, 1975, **12**: 965-974

[58] Dowker J S, Critchley R. Effective lagrangian and energy-momentum tensor in de Sitter space. Phys. Rev. D, 1976, 13: 3224-3232

[59] Erdélyi A, Magnus W, Oberhettinger F, et al, Higher Transcendental Functions, vol. I. Bateman manuscript project, California Institute of Technology New York: McGraw-Hill Book Company, 1953: 34, 36

[60] Ford L H. Quantum vacuum energy in a closed universe. Phys. Rev. D, 1976, **14**: 3304-3314

[61] Christensen S M. Vaccum expectation value of the stress tensor in an arbitrary curved background, the covariant point-separation method. Phys. Rev. D, 1976, **14**: 2490-2501
[62] Davies P C W, Fulling S A., Christensen S M, et al. Energy-momentum tensor of a massless scalar quantum field in a Robertson-Walker universe. Ann. Phys. (N. Y.), 1977, **109**: 108-142
[63] Bunch T S. Calculation of the renormalised quantum stress tensor by adiabatic regularization in two- and four- dimensional Robertson-Walker spacetimes. Ph.D. Thesis, King's College, London, 1977
[64] Bunch T S, Davies P C W. Covariant point-splitting regularization for a scalar quantum field in a Robertson-Walker universe with spatial curvature. Proc. R. Soc. London A, 1977, **357**: 381-394
[65] Freedman D Z, Pi S Y. External gravitational interactions in quantum field theory. Ann. Phys., 1975, **91**: 442-449
[66] Lehmann H, Symanzik K, Zimmerman W. Formulierung quantisierter Feldtheorien. Nuovo Cimento, 1955, **1**: 205-255
[67] Peskin M E, Schroeder D V. An Introduction to Quantum Field Theory Massachusetts: Addison-Wesley Pubhishing company, 1995, 222-230
[68] Bjorken J D, Drell S D. Relativistic Quantum Fields. New York: McGraw-Hill Book Company, 1965
[69] 't Hooft G. Dimensional regularization and the renormalization group. Nucl. Phys. B, 1973, **61**: 455-468
[70] Callan Jr C G. Broken scale invariance in scalar field theory. Phys. Rev. D, 1970, **2**: 1541-1547
[71] Symanzik K. Small distance behaviour in field theory and power counting. Commun. Math. Phys., 1970, **18**: 227-246
[72] Symanzik K. Small-distance-behaviour analysis and Wilson expansions. Commun. Math. Phys., 1971, **23**: 49-86
[73] Das A. Lectures on Quantum Field Theory. New Jersey: World Scientific, 2008: 758
[74] Davies P C W, Fulling S A. Quantum vacuum energy in two dimensional space-times. Proc. R. Soc. Lond. A, 1977, **354**: 59-77
[75] Candelas P. Vacuum polarization in Schwarzschild spacetime. Phys. Rev. D, 1980, **21**: 2185-2202
[76] Vaidya P C. The gravitational field of a radiating star. Proc. India Acad. Sci. A, 1951, **33**: 264-276
[77] Carmeli M, Kaye M. Gravitational field of a radiating rotating body. Ann. Phys. (N.Y.), 1977, **103**: 97-120
[78] 宋世学, 刘辽, 赵峥. 轴对称动态黑洞的性质. 北京师范大学学报 (自然科学版), 1993,

29: 357-360

[79] Page D N. Thermal stress tensors in static Einstein spaces. Phys. Rev. D, 1982, **25**: 1499-1509

[80] Li L X, Liu L. Properties of radiation near the black hole horizon and the second law of thermodynamics. Phys. Rev. D, 1992, **46**: 3296-3301

[81] Wang D X. Entropy of self-gravitating radiation systems and the entropy of black holes. Phys. Rev. D, 1994, **50**: 7385-7388

[82] Wang D X. The upper bound on the entropy of self-gravitating radiation systems. Gen. Rel. Grav., 1995, **27**: 1251-1258

[83] Wang D X. Investigation on the origin of black-hole entropy. Phys. Rev. D, 1996, **53**: 5705-5707

[84] Zannias T. Renormalized thermal stress tensor for arbitrary static space-times. Phys. Rev. D, 1984, **30**: 1161-1167

[85] 黄超光. 共形不变标量场在 Reissner-Nordström 时空中 Boulware 态的重整化能动张量. 物理学报, 1993, **42**: 198-204

[86] Huang C G. Thermal stress-energy tensor of scalar field in Reissner-Nordström space-Time. Phys. Lett. A, 1992, **164**: 384-388

[87] Huang C G. Renormalized stress-energy tensor for conformally invariant scalar field in static spherical space-time, in Some New Trends on Fluid Mechanics and Theoretical Physics//Proceedings of International Conference on Fluid Mechanics and Theoretical Physics in Honor of Professor Pei-yuan Chou's 90th Anniversary, ed. Lin, C. C. and Hu, N. Beijing: Peking University Press, 1993: 572

[88] Huang C G, Liu L, Xu F. On black hole thermodynamics and back-reaction. Chin. Phys. Lett., 1991, **8**: 118-121

[89] Huang C G, Liu L, Zhao Z. Thermodynamical Approach to Back-Reaction. Gen. Rel. Grav., 1993, **25**: 1267-1275

[90] York Jr J W. Black hole in thermal equilibrium with a scalar field: the back-reaction. Phys. Rev. D, 1985, **31**: 775-784

[91] Li L X. Back-reaction of the Kerr black hole. A thermodynamical approach Gen. Rel. Grav., 1996, **28**: 1171-1175

[92] Zhao R, Zhang L c, Liu L. Researching the back-reaction of Kerr-Newman black hole by the thermodynamics method. N. Cim. B, 1996, **111**: 763-767

[93] Gibbons G W, Hawking S W. Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation. Phys. Rev. D, 1977, **15**: 2738-2751

[94] 刘辽, 裴寿镛. 量子史瓦茨黑洞和暗物质. 物理学报, 2006, **55**: 4980-4982

[95] 吴大猷. 古典动力学. 北京: 科学出版社, 1983, 276-284

[96] Landau L D, Lifshitz E M. Mechanics. 3rd ed. New York: Pergamon, 1976, 138-140

[97] Sommerfeld A. Zur Quantentheorie der Spektrallinien. Ann. Physik, 1916, **51**: 1-94

[98] Landau L D, Lifshitz E M. Quantum Mechanics—Non-relativity Theory. Oxford: Pergamon Press, 1977, 170-175

[99] Dreyer O. Quasinormal modes, the area spectrum, and black hole entropy. Phys. Rev. Lett., 2003, **90**: 081301

[100] Zeldovich Ya B, Novikov I D. Astron. Zh., 1966, **43**: 758; Sov. Astron. Astroph. Jour. 1967, 10: 602

[101] Carr B J, Hawking S W. Black holes in the early universe, MNRAS, 1974, **168**: 399-415

[102] Gibbons G W, Hawking S W, Perry M J. Path Integrals and the indefiniteness of the gravitational action. Nucl. Phys. B, 1978, **138**: 141-150

[103] Schoen R M, Yau S T. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. Commun. Math. Phys., 1979, **65**: 46-76

[104] Schoen R M, Yau S T. Proof of the positive action conjecture in quantum relativity. Phys. Rev. Lett., 1979, **42**: 547-548

[105] Hawking S W, Horowitz G T. The gravitational Hamiltonian, action, entropy and surface terms. Class. Quant. Grav., 1996, **13**: 1487-1498

[106] DeWitt B S. Quantum theory of gravity. 1. the canonical theory. Phys. Rev., 1967, **160**: 1113-1148

[107] Hartle J B, Hawking S W. Wave function of the universe. Phys. Rev. D, 1983, **28**: 2960-2975

[108] Vilenkin A. Birth of inflationary universes, Phys. Rev. D, 1983, **27**: 2848-2855

[109] Vilenkin A. Quantum creation of universes. Phys. Rev. D, 1984, **30**: 509-511

[110] Hawking S W, Page D N. Operator ordering and the flatness of the universe. Nucl. Phys. B, 1986, **264**: 185-196

[111] York J M. Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation. Phys. Rev. Lett., 1972, **28**: 1082-1085

[112] Halliwell J J. Introductory Lectures on Quantum Cosmology in Proceedings of the 1990 Jerusalem Winter School on Quantum Cosmology and Baby Universes. Singapore: World Scientific, 1991

[113] Page D. Inflation and flatness in Hawking's state of the universe, Recent Developments in General Relativity, part B — 4th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in General Relativity held on 17-21 Jun 1985, Rome, Italym ed. Ruffini, R. J. AMsterdam: North-Holland, 1986: 1059-1070

[114] Hawking S W, Page D N. Operator ordering and the flatness of the universe. Nucl. Phys. B, 1986, **264**: 185-196

[115] Hawking S W, Luttell J C. The isotropy of the universe. Phys. Lett. B, 1984, **143**: 83-86

[116] Amsterdamski P. Wave function of an anisotropic universe. Phys. Rev. D, 1985, **31**:

3073-3078

[117] Halliwell J J, Hawking S W. Origin of structure in the universe. Phys. Rev. D, 1985, **31**: 1777-1791

[118] Hawking S W. Arrow of time in cosmology. Phys. Rev. D, 1985, **32**: 2489-2495

[119] Page D N. Will entropy decrease if the universe collapses? Phys. Rev. D, 1985, **32**: 2496-2499

[120] Laflamme R, Shellard E P S. Quantum cosmology and recollapse. Phys. Rev. D, 1987, **35**: 2315-2322

[121] Geroch R. Topology in general relativity. J. Math. Phys., 1967, **8**: 782-786

[122] Hawking S W. Wormholes in spacetime. Phys. Rev. D, 1988, **37**: 904-910

[123] Coleman S, Lee K. Wormholes made without massless matter fields. Nucl. Phys. B, 1990, **329**: 387-409

[124] Giddings S, Strominger A. Axion-induced topology change in quantum gravity and string theory. Nucl. Phys. B, 1988, **306**: 890-907

[125] Hawking S W. Do wormholes fix the constants of nature? Nucl. Phys. B, 1990, **335**: 155-165

[126] Coleman S. Black holes as red herrings: topological fluctuations and the loss of quantum coherence. Nucl. Phys. B, 1988, **307**: 867

[127] Parikh M K, Wilczek F. Hawking radiation as tunneling. Phys. Rev. Lett., 2000, **85**: 5042-5045

[128] Parikh M K. A secret tunnel through the horizon. Int. J. Mod. Phys. D, 2004, **13**: 2351-2354; Gen. Rel. Grav. 2004, 36: 2419-2492

[129] Coleman S, Why there is nothing rather than something: a theory of the cosmological constant. Nucl. Phys. B, 1988, **310**: 643-668

[130] Riess A G, Filippenko A V, challis P, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. Astron. J., 1998, **116**: 1009-1038

[131] Perlmutter S et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. Astroph. J., 1999, **517**: 565-586

[132] Riess A G, Filippenko A V, Liu M C, et al. Tests of the accelerating universe with near-infrared observations of a high-redshift type Ia supernova. Astrophys. J., 2000, **536**: 62-67

[133] Riess A G, Nugent P E, Gilliland R L, et al. The farthest known supernova: support for an accelerating universe and a glimpse of the epoch of deceleration. Astrophys. J., 2001, **560**: 49-71

[134] Spergel D N, Vevde L, Peiris H V, et al. First year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters. Astrophys. J. Suppl., 2003, **148**: 175-194

[135] Tegmark M, et al. Cosmological parameters from SDSS and WMAP. Phys. Rev. D, 2004, **69**: 103501

[136] Larson D, et al. Seven-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Power spectra and WMAP-derived parameters. Astrophys. J. Suppl., 2011, **192**: 16

[137] Komatsu E, et al. Seven-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Cosmological interpretation. Astrophys. J. Suppl., 2011, **192**: 18

[138] Gott J R, Li L X. Can the universe create itself? Phys. Rev. D, 1998, **58**: 023501

[139] Vilenkin A. Quantum origin of the universe. Nucl. Phys. B, 1985, **252**: 141-152

[140] Horowitz G T. Quantum cosmology with a positive-definite action. Phys. Rev. D, 1985, **31**: 1169-1177

[141] Boulware D G. Quantization of higher derivative theories of gravity, in Quantum Theory of Gravity ed Christensen, S. M. Bristo: Adam Hilger, 1984: 267-294

[142] Maeda K. Attractor in a superstring model: The Einstein theory, the Friedmann universe, and inflation. Phys. Rev. D, 1987, **35**: 471-479

[143] Liu L, Fan L, Huang C G. The universe created from vacuum-in the quantum gravity interpretation of Brans-Dicke's theory. N. Cim. B, 1989, **104**: 467-473

[144] Liu L, Huang C G. Quantum-gravity interpretation of Brans-Cicke theory — the back-reaction of the vacuum matter field upon the Einstein space-time. Chin. Phys. Lett., 1987, **4**: 265-268

[145] Liu L, Huang C G. The quantum cosmology in the Brans-Dicke thoery. Gen. Rel. Grav. 1987, **20**: 583-587

[146] Liu L, Huang C G. Quantum cosmology based on Brans-Dicke theory//reported on international workshop on quantum cosmology and related topics. Odessa, 1990

[147] Zhu Z H. Boundary conditions in quantum cosmology in the Brans-Dicke's theory. Chin. Phys. Lett., 1992, **9**: 273-276

[148] Zhu Z H, Zhang Y Z, Wu X P. On the cosmological constant in quantum cosmology of the Brans-Dicke theory. Mod. Phys. Lett. A, 1998, **13**: 1333-1337

[149] Xiang Y M. Third quantization of a solvable model inquantum cosmology in Brans-Dicke theory. Chin. Phys. Lett., 1991, **8**: 52-55

[150] 肖兴国、刘辽. Brans-Dicke 理论中的非 Accetta 真空虫洞解. 物理学报, 1994, **43**: 1097-1912

[151] Xiao X G, Carr B J, Liu L. Wormholes in vacuum Brans-Dicke theory. Gen. Re. Grav., 1996, **28**: 1377-1383

[152] Zee A. Broken-Symmetric theory of gravity. Phys. Rev. Lett., 1979, **42**: 417-421

[153] Mo H J, Fang L Z. Cosmic wavefunction with induced gravity. Phys. Lett. B, 1988, **201**: 321-324

[154] Shen Y G, Tan Z Q. Wave function of the universe for the spinor field in the induced

theory of gravity. Chin. Phys. Lett., 1989, **6**: 289-292

[155] Wang W F, Tao C D. Tunneling wave function with induced gravity. Chin. Phys. Lett., 1992, **9**: 561-564

[156] 许建梅、刘辽. 诱导引力中的虫洞解. 物理学报, 1993, **42**: 2032-2038

[157] Jacobson T A, Smolin L. Nonperturbative quantum geometries. Nucl. Phys. B, 1988, **299**: 295-345

[158] Rovelli C, Smolin L. Loop space representation of quantum general relativity. Nucl. Phys. B, **331**: 80-152

[159] Rovelli C. Loop quantum gravity. Living Rev. Relativity, 2008, **11**: 5

[160] Bojowald M. Loop quantum cosmology: Ⅰ. Kinematics. Class. Quantum Grav., 2000, **17**: 1489-1508

[161] Bojowald M. Loop quantum cosmology: Ⅱ. Volume operators. Class. Quantum Grav., 2000, **17**: 1509-1526

[162] Bojowald M. Absence of a singularity in loop quantum cosmology. Phys. Rev. Lett., **86**: 5227-5230

[163] Ashtekar A. Loop quantum cosmology: an overview. Gen. Rel. Grav., 2009, **41**: 707-741

外国人 (及非汉语拼音拼写的华人) 人名对照表

(以中译名的汉语拼音为序)

A

阿达玛	Hadamard
阿德勒	Adler
阿姆斯特丹斯基	Amsterdamski
阿希提卡	Ashtekar
爱因斯坦	Einstein
安比约恩	Ambjørn
安鲁	Unruh

B

巴比诺特	Balbinot
巴里安	Balian
伯努利	Bernoulli
伯克霍夫	Birkhoff
贝蒂	Betti
贝塞尔	Bessel
比安其	Bianchi
博戈留波夫	Bogolyubov
博内	Bonnet
玻尔	Bohr
玻尔兹曼	Boltzmann
布兰斯	Brans
布里渊	Brillouin
布维尔	Boulware

D

达朗贝尔	d'Alembert
戴瑟	Deser
道克	Dowker
德雷尔	Dreyer
德维特	DeWitt
德西特	de Sitter
笛卡儿	Descartes
迪克	Dicke
狄利克雷	Dirichlet
杜普兰田	Duplantier
多伊奇	Deutsch

E

厄米	Hermite

F

法池	Pfautsch
凡迪亚	Vaidya
范弗莱克	Van Vleck
费曼	Feynman
福克	Fock
弗里德曼	Friedmann, A
弗里德曼	Freedman, D. F
傅里叶	Fourier
福林	Fulling

G

高斯	Gauss
戈登	Gordon
格林	Green
戈特	Gott

H

哈勃	Hubble

哈里威尔	Halliwell
哈密顿	Hamilton
哈特	Hartle
海森伯	Heisenberg
汉克尔	Hankel
豪斯多夫	Hausdorff
怀特曼	Wightman
惠勒	Wheeler
霍金	Hawking
霍罗威茨	Horowitz

J

吉本斯	Gibbons
吉丁斯	Giddings
基灵	Killing
杰拉奇	Geroch

K

卡拉比	Calabi
卡伦	Callan
卡梅里	Carmeli
卡西米尔	Casimir
凯尔	Carr
凯依	Kaye
堪德拉	Candelas
科达齐	Codazzi
克尔	Kerr
科尔曼	Coleman
克拉默斯	Kramers
克莱因	Klein
克里池雷	Critchley
克里斯坦森	Christenson
克鲁斯卡尔	Kruskal
柯西	Cauchy
库仑	Coulomb

L

拉夫拉姆	Laflamme
拉格朗日	Lagrange
拉默洛克斯	Lamoreaux
莱曼	Lehmann
朗道	Landau
李	Lee
李	Lie
栗弗席兹	Lifshitz
黎曼	Riemann
里奇	Ricci
立陶	Letaw
刘维尔	Liouville
鲁特瑞尔	Luttrell
伦德勒	Rindler
罗伯逊	Robertson
洛伦兹	Lorentz
罗森	Rosen
罗伊	Roy

M

毛希丁	Mohideen
米尔恩	Milne
米尔斯	Mills
米斯纳	Misner
闵可夫斯基	Minkowski

N

纽曼	Newman
诺斯特朗	Norström
诺维科夫	Novikov

O

欧几里得	Euclid

欧拉	Euler

P

庞加莱	Poincaré
佩奇	Page
彭罗斯	Penrose
皮	Pi
波利亚考夫	Polyakov
普朗克	Planck

Q

齐默尔曼	Zimmermann
前田	Maeda
丘	Yau

R

瑞恩	Raine
瑞斯纳	Reissner

S

塞曼则克	Symanzik
施瓦西	Schwarzschild
舒茨霍德	Schützhold
施特罗明格	Strominger
施温格	Schwinger
斯莫林	Smolin
索恩	Thorne
索末菲	Sommerfeld

T

泰勒	Taylor
特 · 胡夫特	’t Hooft

W

外尔	Weyl
韦伯	Weber
威克	Wick
维兰金	Vilenkin
文策	Wentzel
沃尔夫拉姆	Wolfram
沃克	Walker

X

希尔伯特	Hilbert
谢拉德	Shellard
徐	Zee

Y

雅可比	Jacobi
约克	York

Z

泽尔多维奇	Zeldovich
詹尼亚斯	Zannias

索　　引

F

G

H

J

S

T

W

X

Y

Z

其 他

《现代物理基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1. 现代声学理论基础	马大猷 著	2004.03
2. 物理学家用微分几何 (第二版)	侯伯元, 侯伯宇 著	2004.08
3. 数学物理方程及其近似方法	程建春 编著	2004.08
4. 计算物理学	马文淦 编著	2005.05
5. 相互作用的规范理论 (第二版)	戴元本 著	2005.07
6. 理论力学	张建树, 等 编著	2005.08
7. 微分几何入门与广义相对论 (上册 · 第二版)	梁灿彬, 周彬 著	2006.01
8. 物理学中的群论 (第二版)	马中骐 著	2006.02
9. 辐射和光场的量子统计	曹昌祺 著	2006.03
10. 实验物理中的概率和统计 (第二版)	朱永生 著	2006.04
11. 声学理论与工程应用	朱海潮, 等 编著	2006.05
12. 高等原子分子物理学 (第二版)	徐克尊 著	2006.08
13. 大气声学 (第二版)	杨训仁, 陈宇 著	2007.06
14. 输运理论 (第二版)	黄祖洽 著	2008.01
15. 量子统计力学 (第二版)	张先蔚 编著	2008.02
16. 凝聚态物理的格林函数理论	王怀玉 著	2008.05
17. 激光光散射谱学	张明生 著	2008.05
18. 量子非阿贝尔规范场论	曹昌祺 著	2008.07
19. 狭义相对论 (第二版)	刘 辽, 等 编著	2008.07
20. 经典黑洞与量子黑洞	王永久 著	2008.08
21. 路径积分与量子物理导引	侯伯元, 等 著	2008.09
22. 量子光学导论	谭维翰 著	2009.01
23. 全息干涉计量——原理和方法	熊秉衡, 李俊昌 编著	2009.01
24. 实验数据多元统计分析	朱永生 编著	2009.02
25. 微分几何入门与广义相对论(中册 · 第二版)	梁灿彬, 周彬 著	2009.03
26. 中子引发轻核反应的统计理论	张竞上 著	2009.03
27. 工程电磁理论	张善杰 著	2009.08
28. 微分几何入门与广义相对论(下册 · 第二版)	梁灿彬, 周彬 著	2009.08
29. 经典电动力学	曹昌祺 著	2009.08
30. 经典宇宙和量子宇宙	王永久 著	2010.04

31. 高等结构动力学(第二版)	李东旭 著	2010.09
32. 粉末衍射法测定晶体结构(第二版 · 上、下册)	梁敬魁 编著	2011.03
33. 量子计算与量子信息原理	Giuliano Benenti 等 著	
——第一卷：基本概念	王文阁, 李保文 译	2011.03
34. 近代晶体学(第二版)	张克从 著	2011.05
35. 引力理论(上、下册)	王永久 著	2011.06
36. 低温等离子体	B. M. 弗尔曼, И. M. 扎什京 编著	
——等离子体的产生、工艺、问题及前景	邱励俭 译	2011.06
37. 量子物理新进展	梁九卿，韦联福 著	2011.08
38. 电磁波理论	葛德彪，魏 兵 著	2011.08
39. 激光光谱学	W. 戴姆特瑞德 著	
——第 1 卷：基础理论	姬 扬 译	2012.02
40. 激光光谱学	W. 戴姆特瑞德 著	
——第 2 卷：实验技术	姬 扬 译	2012.03
41. 量子光学导论(第二版)	谭维翰 著	2012.05
42. 中子衍射技术及其应用	姜传海, 杨传铮 编著	2012.06
43. 凝聚态、电磁学和引力中的多值场论	H. 克莱纳特 著	
	姜 颖 译	2012.06
44. 反常统计动力学导论	包景东 著	2012.06
45. 实验数据分析(上册)	朱永生 著	2012.06
46. 实验数据分析(下册)	朱永生 著	2012.06
47. 有机固体物理	解士杰, 等 著	2012.09
48. 磁性物理	金汉民 著	2013.01
49. 自旋电子学	翟宏如, 等 编著	2013.01
50. 同步辐射光源及其应用(上册)	麦振洪, 等 著	2013.03
51. 同步辐射光源及其应用(下册)	麦振洪, 等 著	2013.03
52. 高等量子力学	汪克林 著	2013.03
53. 量子多体理论与运动模式动力学	王顺金 著	2013.03
54. 薄膜生长(第二版)	吴自勤，等 著	2013.03
55. 物理学中的数学物理方法	王怀玉 著	2013.03
56. 物理学前沿——问题与基础	王顺金 著	2013.06
57. 弯曲时空量子场论与量子宇宙学	**刘辽，黄超光 著**	**2013.10**